Problème : Autour de la théorie du Groupe

Soit (G,.) un groupe **d'ordre fini** et H un sous-groupe de G, on note e_G l'élément neutre de (G,.)

DEINITIONS:

1- On appelle un groupe abélien tout groupe commutatif

2- On appelle H un sous-groupe **distingué** de G si est seulement si $\forall\ g \in G, \forall\ h \in H : ghg^{-1} \in H.$

3- On appelle (K, .) un groupe **simple** si est seulement si les seuls groupes distingués dans K sont : (K ,.) et ($\{e_K\}$,.)

4- On considère l'ensemble Z(G) définie par : $Z(G) = \{x\ \in G\ ,\ \forall\ g \in G : gx = xg\}$, cet ensemble est appelé le centre de G

5- Pour le besoin du problème, on admet le théorème suivant :

« *Soit p un nombre premier tel que une puissance de p* (p^{α}) *divise l'ordre de G alors G contient un groupe d'ordre* p^{α}»

PARTIE A :

A -1 Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G
A-2 Montrer que Z(G) est un sous-groupe distingué de G.
A-3 Soit g un élément de G on définit les ensembles suivants :

$$gH = \{gh\ ;\ \ h \in H\} \quad\quad Hg = \{hg\ ;\ \ h \in H\} \quad \text{et } N_G(H) = \{g \in G\ ;\ \ gH = Hg\}$$

A-3-1 Est ce que $(N_G(H),.)$ est un sous-groupe distingué de G ?
A-3-1 Soit (K,.) un sous-groupe , tel que $K \subset H$, si K est distingué dans H est ce que dans ce cas K est distingué dans G ?
[Indication : remarquer que $\subset N_G(H)$]

PARTIE B :

B-1 Montrer que les deux ensembles H et gH ont le même cardinale

B-2 Soient g et g' deux éléments de G vérifiant la relation suivante : $gRg' <=> gH = g'H$
Montrer que « *R* » est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence

B-3 Déduire que l'ordre de H divise L'ordre de G.

B-4 Montrer que si H est distingué dans G alors (G/H,.) tel que G/H= $\{gH\ ; g \in G\}$ est sous-groupe de G.

Partie C :

Soit f un morphisme de groupe de (G,.) vers un groupe (F, x)

C-1 Montrer que $Kerf$ est un sous-groupe distingué de G.
C-2 Montrer qu'il existe un morphisme de groupe entre (G/$Kerf$, .) et (F, x)

Partie D :

D-1 En utilisant la question B-3 déterminer les groupes simples abéliens d'ordre fini.
D-2 Montrer qu'un groupe d'ordre premier est un groupe cyclique
D-3 Montrer que si G/Z(G) est cyclique alors (G,.) est un groupe abélien
D-4 Déduire qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien (avec p un nombre premier)
D-4 Application :

On considère que l'ordre de G est 242 montrer alors G contient un sous-groupe abélien « Non trivial ».