Partie A

1 Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n$

On propose de montrer cette relation par récurrence forte.

>> Initialisation

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geq 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \geq 1$.

Soit n un entier naturel.
On suppose que la relation est vraie jusqu'à l'ordre n, c'est à dire que pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, on a $u_k \geq k$ et on s'intéresse à l'ordre $n+1$.

>> Hérédité

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence forte, on a : $u_n \geq n$ et $u_{n-1} \geq n-1$, d'où :
$u_{n+1} \geq n + n - 1$, autrement dit $u_{n+1} \geq 2n - 1 \geq n + 1$ pour tout $n \geq 2$. [Il est trivial que $2n - 1 \geq n + 1$ ☺].
La relation est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Les deux hypothèses d'un raisonnement par récurrence sont vérifiées, par conséquent, $u_n \geq n$ pour tout n.

2 Pour tout entier naturel n, on a $U_n U_{n+2} + (-1)^{n+1} = U_{n+1}^2$

Nous allons montrer cette égalité par récurrence forte.

>> Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $u_0 u_2 + (-1)^1 = 1 \times 2 - 1 = 1 = (u_1)^2$.
Soit n un entier naturel.
On suppose que la relation est vraie jusqu'à l'ordre n et on s'intéresse à l'ordre $n+1$.

>> Hérédité

$$\begin{aligned} u_{n+1} u_{n+3} + (-1)^{n+2} &= (u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_{n+1}) + (-1)^{n+2} \\ &= u_{n+2}^2 + u_{n+2} u_{n+1} - u_n u_{n+2} - u_n u_{n+1} + (-1)^{n+2} \\ &= u_{n+2}^2 + u_{n+1}\underbrace{(u_{n+2} - u_n)}_{\boxed{u_{n+1}}} - u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2} \\ &= u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - \underbrace{\left(u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1}\right)}_{\boxed{= u_{n+1}^2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}}} \end{aligned}$$

$u_{n+1} u_{n+3} + (-1)^{n+2} = u_{n+2}^2$. La relation est vraie l'ordre $n+1$.

Les deux hypothèses d'un raisonnement par récurrence sont vérifiées, par conséquent, $u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1} = u_{n+1}^2$ pour tout n.

Partie B

Etude des suites (α_n) et (β_n) définies pour tout entier naturel n par : $\alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

1 Relation entre α_n et β_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$.

Les suites (α_n) et (β_n) n'existent que si $n > 0$.
Soit n un entier naturel différent de zéro, nous avons,

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} - \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n}^2 - u_{2n-1} u_{2n+1}}{u_{2n} u_{2n+1}} \quad (A)$$

Le résultat de la question 2, Partie A nous permet d'écrire,

$u_{2n}^2 = u_{2n-1} u_{2n+1} + (-1)^{2n}$ [Il suffit de remplacer n par $2n-1$].

D'où, $u_{2n}^2 = u_{2n-1} u_{2n+1} + 1$.

On remplace dans (A), u_{2n}^2 par l'expression que l'on vient de trouver, on simplifie et on obtient, $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$.

2 Pour tout n non nul, on a $\alpha_n < \beta_n$ et $\beta_n - \alpha_n < 1/n$

>> $\alpha_n < \beta_n$

On part de la relation établie dans la question précédente, à savoir, $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$.

A la question 1, Partie A, nous avons montré que pour tout n, on a $u_n \geq n$, on en déduit alors que $u_{2n} \geq 2n$ et que $u_{2n+1} \geq 2n+1$.

Puisque $n \in IN^*$, alors $u_{2n} u_{2n+1} > 0$ et $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}} > 0$.

Finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a bien $\alpha_n < \beta_n$.

>> $\beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$

D'une manière analogue, on a pour n différent de zéro,

$$u_n \geq n \Rightarrow \begin{cases} u_{2n} \geq 2n \\ u_{2n+1} \geq 2n+1 \end{cases} \Rightarrow u_{2n}\, u_{2n+1} \geq 2n\,(2n+1) \geq n\,.$$

On en déduit que : $\dfrac{1}{u_{2n}\, u_{2n+1}} \leq \dfrac{1}{n}$.

> Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\beta_n - \alpha_n \leq \dfrac{1}{n}$.[1]

3 Pour tout n non nul, on a $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}\, u_{2n+2}}$

Soit n un entier naturel différent de zéro,

On part de : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} - \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}} = \dfrac{u_{2n+1}\,u_{2n} - u_{2n-1}\,u_{2n+2}}{u_{2n+2}u_{2n}} = \dfrac{N}{u_{2n+2}u_{2n}}$

Il reste à montrer que le numérateur N vaut 1.

D'après la définition de la suite (U_n), on a $\begin{cases} u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n+2} = u_{2n+1} + u_{2n} \end{cases}$

$$\begin{aligned} N &= u_{2n}\,(u_{2n} + u_{2n-1}) - u_{2n-1}(u_{2n+1} + u_{2n}) \\ &= u_{2n}^2 + \cancel{u_{2n}\,u_{2n-1}} - \cancel{u_{2n-1}}\,u_{2n+1} - u_{2n-1}\,u_{2n} \\ &= u_{2n}^2 - u_{2n-1}\,u_{2n+1} \end{aligned}$$

Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u_p\, u_{p+2} + (-1)^{p+1} = u_{p+1}^2$ [Relation démontrée dans la partie A question 2].

Autrement dit $u_{p+1}^2 - u_p\, u_{p+2} = (-1)^{p+1}$.

En prenant $p = 2n-1$, on aboutit à l'expression suivante : $u_{2n}^2 - u_{2n-1}u_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1$.

> On reconnaît ici l'expression de N

> Finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}\ u_{2n+2}}$

4 Relation entre α_n et β_n

On se propose de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$.

La définition de (α_n) permet d'écrire $\alpha_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$.

---

[1] Au passage, on peut signaler que les deux encadrements établis permettent d'écrire : $0 \leq \beta_n - \alpha_n \leq \dfrac{1}{n}$

En prenant $n = 2p+1$ dans la relation de départ [2], On trouve: $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$.

D'où pour tout n non nul, on a $\alpha_n = \dfrac{u_{2n+1} - u_{2n}}{u_{2n}} = \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} - 1 = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$

5 Variations de (α_n) et de (β_n)

>> Variations de (α_n)

On part de la relation établie à la question 3, c'est à dire $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}\,u_{2n+2}}$.

Partie A, question 1 $\Rightarrow$ Pour tout entier n, on a $u_n \geq n \Rightarrow \begin{cases} u_{2n} \geq 2n \\ u_{2n+2} \geq 2n+2 \end{cases}$, autrement dit : $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$.

La suite (α_n) est donc croissante.

>> Variations de (β_n)

Evaluons le signe de la différence :

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}+1} - \frac{1}{\alpha_n + 1} = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{(\alpha_{n+1}+1)(\alpha_n+1)}.$$

Le dénominateur est positif car la suite (α_n) à terme positifs.

Puisque (α_n) est croissante alors $\alpha_n - \alpha_{n+1} \leq 0$.

La suite (β_n) est donc décroissante.

6 Les suites (α_n) et de (β_n) sont adjacentes

Rappel

Si deux suites (α_n) et (β_n) vérifient :

- Pour tout $n \in IN^*$, $\alpha_n \leq \beta_n$.
- (α_n) est croissante et (β_n) décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0$.

Alors (α_n) et (β_n) sont convergente et ont la même limite. On dit qu'elles sont **adjacentes**.

>> A la question 2, partie B, nous avons montré que : $\alpha_n \leq \beta_n$.

>> A la question précédente, nous avons montré que (α_n) est croissante et (β_n) décroissante.

>> Pour montrer que, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0$, on va s'appuyer sur le résultat de la question 2, Partie B, c'est à dire l'encadrement : $0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$.

[2] $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\alpha_n-\beta_n$ est convergent, alors, d'après les gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\beta_n)=0$.

Les trois conditions étant vérifiées, on peut affirmer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

7 Limite de (α_n) et limite de (β_n)

Nous venons de montrer que (α_n) et (β_n) ont la même limite. Notons l cette limite.

A la question 4, partie B, nous avons montré que $\alpha_n=\frac{1}{\beta_n}-1$, soit : $\alpha_n\beta_n+\beta_n-1=0$ autrement dit, $l^2+l-1=0$. Le discriminant de ce polynôme du second degré vaut 5.

D'où l'existence de deux racines réelles distinctes : $l_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

On rappelle que : $\alpha_n=\frac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ et $\beta_n=\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$ et que $u_n\geq n$, donc (u_n) est à valeurs positives. (α_n) et (β_n) également et $l>0$

La seule limite possible est l_1.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Nota – différence entre récurrence et récurrence forte

\>> Principe de récurrence

Soient P_0, P_1, ... , P_n ... des propriétés mathématiques.

On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un n quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

\>> Principe de récurrence forte

Soient P_0, P_1, ... , P_n ... des propriétés mathématiques.

On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un n quelconque, si toutes les propriétés P_0, P_1, ... , P_n ... sont vraies alors P_{n+1} est aussi vraie. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

FIN DU PROBLEME