Concours des E.N.S.I. M & P 1978

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

Soit un espace vectoriel réel E de dimension 3, rapporté à une base B. Chaque vecteur $\vec{X}$, de coordonnées (x, y, z), pourra être désigné par une matrice unicolonne X, dont la transposée sera notée $\tilde{X}$. Sauf indication contraire, c'est toujours par rapport à B que seront prises les coordonnées de tous les vecteurs.

On considère dans E l'endomorphisme f explicité par rapport à B par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On désigne par E^* le dual de E.

I

1° Préciser le rang, l'image et le noyau de f.

2° Calculer les puissances successives de A.

3° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

4° Soit g une forme linéaire de E^*, explicitée au besoin par une matrice unicolonne U. Étudier dans E^* l'endomorphisme $g \longmapsto g \circ f$ (rang, image, noyau, éléments propres).

.../...

II

On définit dans E la relation binaire non symétrique suivante :

$$[\vec{X} \mathcal{R} \vec{X'}] \Leftrightarrow [\dot{X} A X' = 0]$$

Trouver tous les vecteurs $\vec{X}'$ en relation avec les vecteurs $\vec{X}$ suivants :

a. Le vecteur (2, 1, 0).

b. Le vecteur (1, 0, 1).

c. Tous les vecteurs du plan $x + y + 3z = 0$.

d. Tous les vecteurs du plan $2x + y - 2z = 0$.

e. Tous les vecteurs de E.

Peut-on expliquer qualitativement, et quantitativement si possible, certains des résultats ainsi obtenus?

III

On choisit pour E une nouvelle base B′ en prenant trois vecteurs dont la première coordonnée par rapport à B vaut 1. Par rapport à B′, l'endomorphisme f est explicité par la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire quels sont les trois vecteurs de B′, en indiquant leurs coordonnées par rapport à B. Écrire la matrice P de passage (de B à B′) ainsi que son inverse P^{-1}.

IV

On se propose de trouver trois fonctions réelles x, y, z de la variable réelle t vérifiant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) + 8t + 2 \\[2mm] \dfrac{dy}{dt}(t) = -2x(t) + y(t) - 3z(t) - 12t - 2 \\[2mm] \dfrac{dz}{dt}(t) = -x(t) + y(t) - 2z(t) - 8t - 6 \end{cases}$$

On donne $x(0) = -2$, $y(0) = 0$, $z(0) = -2$.

1° Déterminer les trois fonctions x, y, z (soit en utilisant les résultats de la partie III, soit par toute autre méthode).

2° On considère, dans un espace affine réel de dimension trois, rapporté à un repère affine quelconque, le point M dont les coordonnées sont $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Vérifier que la courbe décrite par M lorsque t varie est une courbe plane, et donner une équation de son plan.