Partie I

On considère la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in IN^*\ ,\ S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$$

I-1- Montrer que : $\forall\, p \in IN^*$, $\frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \le \frac{1}{p}$

I-2- Déduire que : $\forall\, n \in IN^*$, $0 \le S_n \le 1$

I-3- Montrer que : $\forall\, n \in IN^*$, $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$, puis montrer que la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ est croissante.

I-4- Conclure que la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ converge vers un réel $\boldsymbol{\gamma}$ appartenant à l'intervalle [0,1]

Partie II

II-1-Soit g une fonction dérivable et strictement décroissante sur un intervalle $[p, p+1]$, avec p est un entier naturel, montrer que :

$$g(p+1) - \frac{g'(p+1)}{2} \le \int_p^{p+1} g(t)dt$$

II-2 Montrer alors que :

$$\forall\, n \in IN^*\ ,\ S_n \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

II-3- On admet que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer alors que :

$$\gamma \le \frac{18-\pi^2}{12}$$

On considère les deux suites $(V_n)_{n\in IN^*}$ et $(W_n)_{n\in IN^*}$ définies par :

$$\forall\, n \in IN^*\ ,\ V_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \ \text{ et } \ W_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p^2}$$

II-4-Montrer que les deux suites $(V_n)_{n\in IN^*}$ et $(W_n)_{n\in IN^*}$ sont croissantes

II-5- Montrer que : $\forall\, p \in IN$, $e^{-p} \le \frac{1}{P+1}$

II-6- Montrer que $\forall\, n \in IN^*$, $W_n \le V_n < 1$

II-7- Montrer que : $\forall\, n \in IN^*$, $V_n \le \frac{1-e^{-(n+1)}}{e-1}$

II-8-Déduire que la suite est $(V_n)_{n\in IN^*}$ convergente vers un réel α appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; \frac{1}{e-1}\right]$, puis que la suite $(W_n)_{n\in IN^*}$ converge vers un réel β appartenant à l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{e-1}\right[$

Partie III

III-1- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[p, p+1]$, avec p est un entier naturel, montrer que :

$$\int_{p}^{p+1} f(t)dt \leq \frac{f(p+1)+f(p)}{2}$$

III-2- En utilisant la question II-1 montrer que :

$$\forall\, n \in IN^*,\quad \frac{3}{2} V_n + \frac{1}{2} W_n \leq \int_{1}^{n+1} \frac{e^{-t}}{t} dt + \frac{2}{e} - \frac{3e^{-(n+1)}}{2(n+1)} - \frac{e^{-(n+1)}}{2(n+1)^2}$$

III-3- En utilisant la question III-1 montrer que :

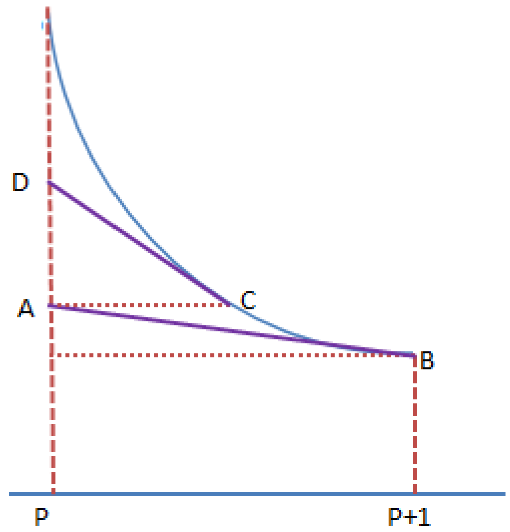
$$\forall\, n \in IN^*, \int_{1}^{n+1} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq V_n - \frac{1}{2e} + \frac{e^{-(n+1)}}{2(n+1)}$$

III-4- Déduire que : $\frac{1}{e} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3}{e}$

III-5-

Dans le plan définit par le repère orthonormé $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, On considère sur l'intervalle $[p, p+1]$ (avec p est un entier naturel non nul) la courbe (C) de la fonction $L: t \to \frac{1}{t}$

On construit sur ce plan le point $A(p, y_0)$ l'intersection de la droite dont l'équation x=p et la droite adjacente à la courbe (C) passant par le point $B\left(p+1, \frac{1}{p+1}\right)$, puis on construit le point $C(x_1, y_0)$ l'intersection de la droite dont l'équation $y = y_0$ et la courbe (C) , puis finalement on construit le point $D(p, y_2)$ l'intersection de la droite dont l'équation x=p et la droite adjacente à la courbe (C) passant par le point $C(x_1, y_1)$ (Voir la figure suivante) :



III-5-1- Montrer que :

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{p+2}{(p+1)^2} \\ x_1 = \dfrac{(p+1)^2}{p+2} \\ y_2 = \dfrac{p+2}{(p+1)^4} + \dfrac{p+2}{(p+1)^2} \end{cases}$$

III-5-2- Montrer alors que :

$$L(p+1) - \frac{L'(p+1)}{2} - \frac{L'\left(\frac{(p+1)^2}{p+2}\right)}{2(p+2)^2} \leq \int_{p}^{p+1} L(t)dt$$

III-5-3- Déduire que :

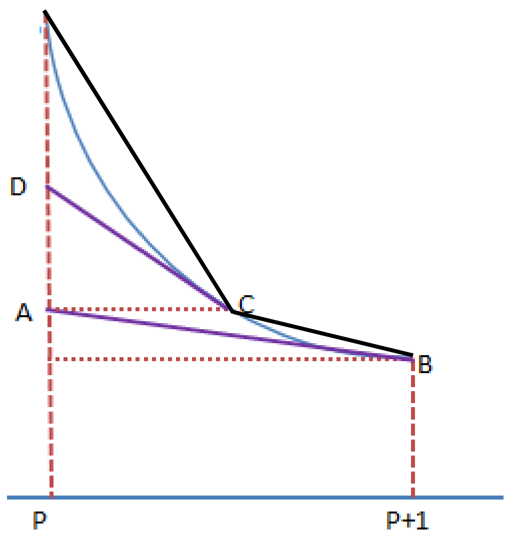
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^4}\right) - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)^4}$$

III-5-4- On admet que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Montrer alors que :

$$\boldsymbol{\gamma \leq \frac{360 - 15\pi^2 - \pi^4}{180}}$$

III-5-4- En considérant la figure ci-dessous :



Par une comparaison des surfaces montrer que :

$$\int_{p}^{p+1} L(t)dt \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+1)^2(p+2)} + \frac{1}{2p(p+2)}$$

III-5-5- Déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geq \frac{7}{8} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2(n+2)} + \frac{2n+3}{4(n+2)(n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(p+1)}$$

III-5-6 : Montrer que :

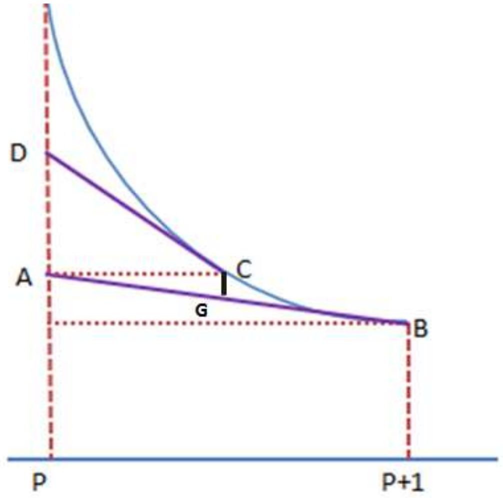
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(p+1)} = -1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$

III-5-7- Déduire que :

$$\boldsymbol{\gamma \geq \frac{33 - 2\pi^2}{24}}$$

Partie IV (*Vers une meilleure approximation)*

On considère la figure de la question III-5 , on construit le point G l'intersection de la droite (AB) et la droite orthogonale à l'axe des abscisses passant par le point C .



IV-1- Montre que Δ l'aire du triangle (ACG) est égale à :

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}$$

IV-2-Montrer que :

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[-\frac{7}{4}+\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{n+2}{(n+1)^2}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2(p+1)}\right]$$

IV-3- En utilisant les questions III-5-3, III-5-6 et IV-2 , montrer alors que :

$$\forall\, n \in IN^*,\ S_n \leq \frac{29}{8}-\frac{3}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^4}\right)-\frac{2n+3}{(n+1)^2}-\frac{1}{2(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

IV-4- Déduire alors que :

$$\boldsymbol{\gamma \leq \frac{29}{8}-\frac{3\pi^2}{12}-\frac{\pi^4}{180}}$$

Finalement d'après la question III-5-4 et IV-4 on a montré que : $\boldsymbol{\gamma} \in [\mathbf{0,552}\ ;\mathbf{0,62}\ ]$

Fin

****