

Partie I : Etude de quelques propriétés de l'application trace

1-a

Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de E et λ un scalaire de \mathbb{R} alors :

$$\text{Tr}(\lambda M + N) = \sum_{i=1}^n (\lambda m_{i,i} + n_{i,i}) = \lambda \left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} \right) + \sum_{i=1}^n n_{i,i} = \lambda \text{Tr}(M) + \text{Tr}(N)$$

Donc Tr est une forme linéaire.

1-b

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

D'abord : $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, $BA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$

$$\text{Alors : } \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \text{Tr}(BA)$$

Puis on peut déduire d'après la définition de Tr que : $\forall M \in E : \text{Tr}(M) = \text{Tr}({}^t M)$

$$\text{Alors : } \text{Tr}(BA) = \text{Tr}({}^t(BA)) = \text{Tr}({}^t A {}^t B)$$

Finalement , on a montré que : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}({}^t A {}^t B)$

1-c

Comme Tr est une forme linéaire (application linéaire) alors : $\dim E = \dim \text{KerTr} + \dim(\text{ImTr})$

D'autre part , la dimension de l'image de Tr ne peut être que 1 car $\text{ImTr} \subset \mathbb{R}$ et l'application ne peut pas être nulle (il suffit de prendre $M = I_n$), alors : $\dim \text{KerTr} = n^2 - 1$

Ce qui veut dire que KerTr est un Hyperplan de E .

1-d

$\text{Vect}(I_n)$ est une droite vectorielle de E , alors $\dim \text{Vect}(I_n) = 1$

$$\text{Donc : } \dim \text{KerTr} + \dim \text{Vect}(I_n) = n^2 = \dim E$$

Soit $M \in \text{KerTr} \cap \text{Vect}(I_n)$ alors :

$$\begin{aligned} M \in \text{KerTr} \cap \text{Vect}(I_n) &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \text{ et } \text{Tr}(M) = 0 \\ &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \text{ et } n\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \text{ et } \alpha = 0 \\ &\Rightarrow M = 0_E \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \text{KerTr} \cap \text{Vect}(I_n) = \{0_E\}$$

Finalement on a montré que : $E = \text{KerTr} \oplus \text{Vect}(I_n)$

1-e

D'abord d'après la question 2-c KerTr est un hyperplan

Si n est pair :

Il suffit de considérer la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $\begin{cases} m_{i,i} = (-1)^i \\ m_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Cette matrice est inversible (toutes les colonnes sont indépendantes) et $\text{Tr}(M) = 0$

Alors KerTr contient la matrice inversible M

Si n est impair :

Il suffit de considérer la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $\begin{cases} m_{2,2} = 2 \\ m_{i,i} = (-1)^i \text{ si } i \neq 2 \\ m_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Cette matrice est inversible (toutes les colonnes sont indépendantes) et $\text{Tr}(M) = 0$

Alors KerTr contient la matrice inversible M

2-a

Comme φ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie, alors il suffit de montrer que φ est injective.

Soit M une matrice de E

D'après la question 1-d on déduit que : $M \in E \Rightarrow \exists! (N; \alpha) \in \text{KerTr} \times \mathbb{R} ; M = N + \alpha I_n$

Puis :

$$M \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(M) = 0$$

$$\Rightarrow N + \alpha I_n + n\alpha I_n = 0$$

$$\Rightarrow N \in \text{Vect}(I_n) \text{ et } N = -(1+n)\alpha I_n$$

$$\Rightarrow N = 0_E \text{ et } N = -(1+n)\alpha I_n \text{ car } \text{KerTr} \text{ et } \text{Vect}(I_n) \text{ sont en somme direct}$$

$$\Rightarrow M = 0_E$$

$$\Rightarrow \text{Ker}\varphi = \{0_E\}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est injective}$$

Finalemment φ est un automorphisme de E

2-b-i

$$M \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(M) = M$$

$$\Leftrightarrow M + \text{tr}(M)I_n = M$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(M)I_n = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{KerTr}$$

Alors : $E_1 = \text{KerTr}$

2-b-ii

$$M \in E_{n+1} \Leftrightarrow \varphi(M) = (n+1)M$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{\text{Tr}(M)}{n}\right)I_n$$

$$\Rightarrow M \in \text{Vect}(I_n)$$

Donc : $E_{n+1} \subset \text{Vect}(I_n)$

D'autre part :

$$M \in \text{Vect}(I_n) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = (n+1)\alpha I_n \text{ et } M = \alpha I_n$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = (n+1)M$$

$$\Rightarrow M \in E_{n+1}$$

Donc : $\text{Vect}(I_n) \subset E_{n+1}$

Finalemment : $E_{n+1} = \text{Vect}(I_n)$

2-b-iii

D'après la question 2-b-i on déduit que 1 est une valeur propre de φ et que le sous-espace propre associé est $E_1 = \text{KerTr}$

De même, D'après la question 2-b-ii on déduit que $(n+1)$ est une valeur propre de φ et que le sous-espace propre associé est

$$E_{n+1} = \text{Vect}(I_n)$$

Et d'après la question 1-d : $E = E_1 \oplus E_{n+1}$

Alors, on déduit que l'application linéaire φ est diagonalisable

3-a

Soit M une matrice de E et on pose : $P(X) = X^2 - 2X + 1$

Alors :

$$P(\Psi)(M) = \Psi(\Psi(M)) - 2\Psi(M) + M = (M + \text{Tr}(M)J + \text{Tr}(M)J) - 2M - 2\text{Tr}(M)J + M = 0_E$$

$$\text{Donc : } \forall M \in E, P(\Psi(M)) = 0_E$$

Ce qui veut dire que le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de Ψ

3-b

Comme le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de Ψ , alors les valeurs propres réelles de l'application linéaire Ψ sont à extraire des racines réelles du polynôme P .

D'autre part, comme -1 est la seule racine réelle de P , alors on déduit que -1 est la seule valeur propre de l'application Ψ .

3-c

Si Ψ est diagonalisable alors cela veut dire que E est la somme directe des sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de Ψ .
Et comme -1 est la seule valeur propre de Ψ

Alors dans ce cas : $E = \text{Ker}(\Psi + I_d)$, avec I_d est l'application linéaire « identité ».

Donc :

$$\begin{aligned} E = \text{Ker}(\Psi + I_d) &\Rightarrow \forall M \in E, \Psi(M) + M = 0_E \\ &\Rightarrow \forall M \in E, \Psi(M) + M = 0_E \\ &\Rightarrow \forall M \in E, M = -\left(\frac{\text{Tr}(M)}{2}\right)J \\ &\Rightarrow \forall M \in E, \text{Tr}(M) = 0 \\ &\Rightarrow E \subset \text{KerTr} \text{ (ceci est une contradiction)} \end{aligned}$$

Finalement Ψ n'est pas diagonalisable

Partie II: Un premier résultat préliminaire

1-

D'abord il faut noter que F_1 est un sev de F

Montrons que v est linéaire :

Soient deux vecteurs x et y de F_1 et λ un scalaire alors :

$$v(\lambda x + y) = u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda v(x) + v(y)$$

Montrons que v est injective :

On note d'abord que $\text{Ker} v \subset F_1$

D'autre part, soit $x \in \text{Ker} v$ alors :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker} v &\Rightarrow v(x) = 0 \\ &\Rightarrow u(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker} u \\ &\Rightarrow x \in F_1 \cap \text{Ker} u \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ car } F_1 \cap \text{Ker} u = \{0_F\} \\ &\Rightarrow \text{Ker} v = \{0_F\} \\ &\Rightarrow v \text{ est injective} \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} F = F_1 \oplus \text{Ker} u &\Rightarrow \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(\text{Ker} u) \\ &\Rightarrow \dim(E) = \dim(F_1) + (\dim E - \dim(\text{Im}(u))) \\ &\Rightarrow \dim(F_1) = \dim(\text{Im}(u)) \end{aligned}$$

Finalement, on peut conclure v est un isomorphisme

2-a

La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans F , et comme l'application v est un automorphisme (en particulier : injective) alors la famille $(v(e_i))_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans $\text{Im}(u)$, et comme G est de dimension finie, alors d'après le théorème de la base incomplète on peut compléter la $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ par une famille $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m)$ afin que $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ soit une base de G .

2-b

D'abord par définition :

$$\begin{cases} u(e_i) = v(e_i) = \varepsilon_i \text{ pour } i \in \llbracket 1, r \rrbracket \\ u(e_i) = 0 \quad \text{pour } i \in \llbracket r+1, p \rrbracket \end{cases}$$

Alors finalement : $\text{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou I_r est la matrice identité de $M_r(\mathbb{R})$

3-

Soit M une matrice de $M_{m,p}(\mathbb{R})$.

On considère u l'application linéaire associée à cette matrice (de rang r) d'un espace vectoriel F de dimension m vers un espace vectoriel G de dimension p

D'après la question précédente, on a montré que la matrice M et la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_{m,p,r}$ sont deux matrices de la même application linéaire relativement à deux couple de base, alors on déduit que les deux matrices M et $J_{m,p,r}$ sont équivalentes.

Cela veut dire que : $\exists (S, T) \in GL_m(\mathbb{R}) \times GL_p(\mathbb{R})$ tel que $M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$

4-

On considère les mêmes notations que la question 2 et on note toujours que r est le rang d'une matrice M

Cas : $0 < r = p < m$

Dans ce cas l'application u

$$u : F \rightarrow \text{Im}(u)$$

$$x \rightarrow u(x)$$

Est un automorphisme (dans ce cas : u est surjective par définition et $\dim F = \dim \text{Im}(u)$) alors cela veut dire que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_i) = \varepsilon_i$$

$$\text{Alors : } J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas : $0 < r = m < p$

Dans ce cas l'application : on considère le supplémentaire F_1 de $\text{Ker } u$, alors l'application v :

$$v : F_1 \rightarrow \text{Im}(u) = G$$

$$x \rightarrow v(x) = u(x)$$

est un automorphisme alors :

$$\begin{cases} u(e_i) = v(e_i) = \varepsilon_i \text{ pour } i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ u(e_i) = 0 \quad \text{pour } i \in \llbracket m, p \rrbracket \end{cases}$$

$$\text{Donc : } J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas : $0 < r = m = p$

Dans ce cas la matrice M est inversible ce qui veut dire que l'application

$$u : F \rightarrow G$$

$$x \rightarrow u(x)$$

Est un automorphisme de F vers G , alors cette application peut transférer la base $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ vers une base $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ de G .

C'est-à-dire que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_i) = \varepsilon_i$

Alors : $J_{m,p,r} = I_p$ ou I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{R})$

Partie III: Un deuxième résultat préliminaire

1-

On considère des scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ tel que : $\sum_{i=1}^s \alpha_i l_i^* = 0$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \alpha_i l_i^* = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^s \alpha_i l_i^*(l_j) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_i \delta_i^j = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \end{aligned}$$

Alors la famille (l_1^*, \dots, l_s^*) est libre

2-

Soit $x \in L$ tel que $x = \sum_{i=1}^s x_i l_i$ et $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ alors :

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^s x_i l_i &\Rightarrow l_j^*(x) = \sum_{i=1}^s x_i l_j^*(l_i) \\ &\Rightarrow l_j^*(x) = \sum_{i=1}^s x_i \delta_j^i \\ &\Rightarrow l_j^*(x) = x_j \end{aligned}$$

Donc, on a montré que : $\forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, l_j^*(x) = x_j$

3-

Soit $h \in L^*$ et $x \in L$ tel que $x = \sum_{i=1}^s x_i l_i$ alors :

$$h(x) = \sum_{i=1}^s x_i h(l_i) = \sum_{i=1}^s h(l_i) l_i^*(x)$$

Donc, on a montré que : $\forall x \in E, h(x) = \sum_{i=1}^s h(l_i) l_i^*(x)$

Ce qui veut dire que : $h = \sum_{i=1}^s h(l_i) l_i^*$

Alors la famille (l_1^*, \dots, l_s^*) est génératrice de L^*

4-

D'après les questions précédentes la famille (l_1^*, \dots, l_s^*) est libre et génératrice de L^* , donc la famille (l_1^*, \dots, l_s^*) est une base de L^* .

Finalement : $\dim L^* = \text{card}\{l_1^*, \dots, l_s^*\} = s$

Partie IV: Une caractérisation d'une forme linéaire

1-

Soient M et N deux matrices de E et λ un scalaire de \mathbb{R} alors :

$$\Phi_A(\lambda M + N) = \text{Tr}(\lambda AM + AN) = \text{Tr}(\lambda AM) + \text{Tr}(AN) = \lambda \text{Tr}(AM) + \text{Tr}(AN)$$

Donc, Φ_A est une forme linéaire

2-a

Soient A et B deux matrices de E et λ un scalaire de \mathbb{R} alors :

$$\begin{aligned} \forall M \in E, h(\lambda A + B)(M) = \Phi_{\lambda A + B}(M) &\Rightarrow \Phi_{\lambda A + B}(M) \Rightarrow \forall M \in E, h(\lambda A + B)(M) = \text{Tr}(\lambda AM + BM) \\ &\Rightarrow \forall M \in E, h(\lambda A + B)(M) = \lambda \text{Tr}(AM) + \text{Tr}(AN) \\ &\Rightarrow \forall M \in E, h(\lambda A + B)(M) = (\lambda \Phi_A + \Phi_B)(M) \\ &\Rightarrow h(\lambda A + B) = \lambda h(A) + h(B) \end{aligned}$$

Donc, h est une application linéaire.

2-b-i

Soient $A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ et $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket$ alors :

$$\Phi_A(E_{i,j}) = \text{Tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^n \sum_{u=1}^n a_{k,u} e_{u,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{u=1}^n a_{k,u} \delta_u^i \delta_k^j = a_{j,i}$$

2-b-ii

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de E

Alors :

$$\begin{aligned} A \in \text{Ker } h &\Rightarrow \forall M \in E, \Phi_A(M) = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket, \Phi_A(E_{i,j}) = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket, a_{j,i} = 0 \\ &\Rightarrow A = 0_E \end{aligned}$$

Donc on a montré que $\text{ker } h = \{0_E\}$, ce qui veut dire que h est injective.

2-c

D'abord d'après la partie III on déduit que : $\dim E = \dim E^*$, et comme h est injective, alors h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie V : Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

1-

D'abord : $\dim \text{Vect}(A) + \dim H = 1 + (n^2 - 1) = \dim E$

Puis, soit M une matrice de E

$M \in \text{Vect}(A) \cap H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda A \in H$ et $M = \lambda A$

Alors forcément $\lambda = 0$ car si non A appartient à H

Donc : $\text{Vect}(A) \cap H = \{0_E\}$

Finalement, on conclut que : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$

2-

On considère une matrice A n'appartenant pas à H et l'application T de E vers \mathbb{R} définie par :

$$T: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M = K_M + \lambda_M A \rightarrow T(M) = \lambda_M \text{ avec } (K_M, \lambda_M) \text{ est le couple définissant la décomposition de } M \text{ sur } H \oplus \text{Vect}(A)$$

Montrons que T est une forme linéaire :

Soient M et N deux matrices de E et α un scalaire de \mathbb{R} alors :

$$T(\alpha M + N) = \lambda_{\alpha M + N} = T((\alpha K_M + K_N) + (\alpha \lambda_M + \lambda_N)A) = \alpha \lambda_M + \lambda_N = \alpha T(M) + T(N)$$

Alors, T est une forme linéaire, c'est-à-dire que T appartient à E^*

Déterminons $\text{Ker } T$:

$$M \in \text{Ker } T \Leftrightarrow T(M) = 0 \Leftrightarrow \lambda_M = 0 \Leftrightarrow M \in H$$

Alors : $\text{Ker } T = H$

D'autre part, on a vu que l'application h (question 2-c) est un isomorphisme de E vers E^* (en particulier h est surjective), et comme T appartenant à E^* , alors :

$$\exists B \in E, h(B) = \Phi_B = T$$

Finalement :

$$\exists B \in E, H = \text{Ker } T = \text{Ker } \Phi_B$$

Partie VI: Tout hyperplan de E contient au moins une matrice orthogonale

Rappelons d'abord pourquoi la forme linéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur E est un produit scalaire :

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de E.

- La linéarité de l'application Tr entraîne le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire
- $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle$
- $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$
- $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow A = 0$

1-a

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donc ${}^tA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $d_{i,j} = a_{j,i}$

Alors : ${}^tAB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n d_{i,k} b_{k,j}$

Puis : $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{i,k} b_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i}$

Finalement : $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$

1-b

On considère une base (e_1, \dots, e_{n^2-1}) d'un hyperplan H de E.

Par la procédé de Gram-Schmidt (en prenant la norme euclidien associée au produit scalaire) on peut construire une base $(e'_1, \dots, e'_{n^2-1})$ orthonormale de H à partir de la base (e_1, \dots, e_{n^2-1}) . Puis en appliquant le théorème de la base incomplète : $\exists e'_{n^2} \in E \setminus H$, la famille (e'_1, \dots, e'_{n^2}) soit une base orthonormale de E.

Dans ce cas, si on considère un vecteur Y appartenant au $\text{Vect}(e'_{n^2})$ alors ce vecteur est orthogonal à tous les éléments de la base $(e'_1, \dots, e'_{n^2-1})$ de H, donc H est orthogonal à Y.

1-c

Il est clair que θ_N est un endomorphisme de E, il suffit de montrer qu'elle est injective.

$$M \in \text{Ker } \theta_N \Leftrightarrow \theta_N(M) = 0 \Leftrightarrow {}^tNMN = 0 \Leftrightarrow N {}^tNMN {}^tN = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } \theta_N = \{0_E\}$$

Donc finalement θ_N est un endomorphisme injective de E (dimension finie) alors θ_N est un automorphisme

1-d

Soit P de E :

- $\theta_{N_1} \circ \theta_{N_2}(P) = \theta_{N_1}({}^tN_2PN_2) = {}^t(N_2N_1)PN_2N_1 = \theta_{N_2N_1}(P)$
- $\theta_{{}^tN_1} \circ \theta_{N_1}(P) = \theta_{{}^tN_1N_1}(P) = P \Rightarrow \theta_{{}^tN_1} \circ \theta_{N_1} = I_d \Rightarrow (\theta_{N_1})^{-1} = \theta_{{}^tN_1}$

2-

θ_N réduit à O_n est un morphisme de groupe (O_n, \times)

Soit N et M de O_n alors :

- $M \in \text{Ker } \theta_N \Leftrightarrow \theta_N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow \theta_N$ est injective de
- $\theta_N(P) = M \Leftrightarrow {}^tNPN = M \Leftrightarrow P = NM {}^tN$ puis ${}^tPP = {}^t(NM {}^tN)(NM {}^tN) = I_n$
On déduit que : $\forall M \in O_n \exists P \in O_n$ telle que $\theta_N(P) = M$ ce qui veut dire que θ_N est surjective

3- On procédé comme la question 2

4-

$\langle \theta_N(P), \theta_N(Y) \rangle = \text{Tr}({}^tPY) = \langle P, Y \rangle$, ce qui implique que : $P \in H_Y \Leftrightarrow \theta_N(P) \in H_{\theta_N(Y)}$

5-a :

Soit $P \in O_n \cap S_n \cap H_Y$ alors :

$$\langle P, Y_S \rangle = \frac{1}{2} \langle P, Y \rangle + \frac{1}{2} \langle P, {}^t Y \rangle = \frac{1}{2} \langle P, {}^t Y \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}({}^t P {}^t Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(P {}^t Y) = \frac{1}{2} \langle P, Y \rangle = 0$$

Donc : $O_n \cap S_n \cap H_Y \subset O_n \cap S_n \cap H_{Y_S}$

Soit $P \in O_n \cap S_n \cap H_{Y_S}$ alors :

$$\langle P, Y_S \rangle = \frac{1}{2} \langle P, Y \rangle + \frac{1}{2} \langle P, {}^t Y \rangle = \langle P, Y \rangle = 0$$

Donc : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} \subset O_n \cap S_n \cap H_Y$

Finalement : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} = O_n \cap S_n \cap H_Y$

5-b

La matrice Y_S est symétrique à coefficients réelles, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Ce qui veut dire que : $\exists U \in O_n$ tel que $Y_S = UY' {}^t U$ avec Y' est une matrice diagonale

Ce qui implique que : $Y' = {}^t U Y_S U = \theta_U(Y_S)$

5-c

- La matrice $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ (est clairement symétrique)
- $Y' = \text{diag}(y_{i,i})$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\langle Q, Y' \rangle = \text{Tr}(QY') = \sum_{j=1}^n y_{i,i} q_{i,i} = 0$ alors $Q \in H_{Y'}$
- ${}^t Q Q = Q^2 = I_n$, donc $Q \in O_n$

Finalement, $Q \in O_n \cap S_n \cap H_{Y'}$

5-d

En utilisant la question 4 on déduit que :

$$\begin{aligned} Q \in O_n \cap S_n \cap H_{Y'} &\Rightarrow Q \in H_{Y'} \\ &\Rightarrow Q \in H_{\theta_U(Y_S)} \\ &\Rightarrow \theta_{{}^t U}(Q) \in H_{\theta_{{}^t U}(\theta_U(Y_S))} \text{ (résultat de la question 4)} \\ &\Rightarrow \theta_{{}^t U}(Q) \in H_{Y_S} \text{ (Formule de la question 1-d)} \end{aligned}$$

Alors $\theta_{{}^t U}(Q) \in H_{Y_S}$

Puis par un simple calcul on montre que la matrice $\theta_{{}^t U}(Q)$ est orthogonale et symétrique.

Et comme d'après la question 5-a : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} = O_n \cap S_n \cap H_Y$

Alors on conclut que : $\theta_{{}^t U}(Q) \in O_n \cap S_n \cap H_Y$

5-e

Conclusion directe de la question 5-d, il suffit de considérer la matrice $\theta_{{}^t U}(Q)$

6-a

En faisant permuter les coefficients diagonaux de la matrice Y afin de les ordonner de telle façon qu'on ait la relation demandée et ceci revient à transformer la matrice Y par des matrices orthogonales

$$\text{Posons } Y = (y_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 étape :

Si $|y_{1,1}| > |y_{2,2}|$ alors :

On transforme la matrice Y vers la matrice $Y_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, cette matrice va permettre de permuter uniquement les deux coefficients $y_{1,1}$ et $y_{2,2}$

2- étape :

Si $|y_{3,3}| < |y_{2,2}|$ mais $|y_{3,3}| > |y_{1,1}|$ alors on va transformer la matrice Y_1 vers $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} Y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ de permuter uniquement les coefficients $y_{3,3}$ et $y_{2,2}$

Si $|y_{3,3}| < |y_{1,1}| < |y_{2,2}|$ alors on va transformer Y_1 deux fois vers une matrice :

$$Y_2 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} Y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

Puis on va procéder de la même manière pour l'ensemble des coefficients diagonaux, ainsi on va transformer Y par des matrices orthogonales et symétriques R_j avec $j \in \mathbb{N}$ vers une matrice $D = (\prod_{j \in \mathbb{N}} R_j) Y (\prod_{j \in \mathbb{N}} R_j)$ dont ses coefficients vérifient la relation demandée.

Alors en posant : $U = (\prod_{j \in \mathbb{N}} R_j)$ on déduit que $D = \theta_U(Y)$

6-b

Si $d_{n,n} = 0$ alors tous les coefficients diagonaux de la matrice D sont nuls, ce qui veut dire que les coefficients diagonaux de Y le sont aussi.

Il suffit de considérer la matrice identité I_n , elle est orthogonale et positive et en plus : $\langle I_n, Y \rangle = \text{Tr}(Y) = 0$, ce qui veut dire que I_n appartient à l'orthogonal de Y (H_Y)

6-c-i

En effectuant le calcul par bloc :

$${}^t P_\alpha P_\alpha = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & {}^t A_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & A_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2p-1} & 0 \\ 0 & {}^t A_\alpha A_\alpha \end{pmatrix} = I_{2p+1}$$

6-c-ii

On pose $P_\alpha = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2p+1}$ et $(d_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2p+1}$, alors :

$$\langle P_\alpha, D \rangle = \sum_{i=1}^{2p+1} \sum_{k=1}^{2p+1} h_{k,i} d_{k,i} = \sum_{i=1}^{2p-1} \sum_{k=1}^{2p-1} h_{k,i} d_{k,i} + h_{2p,2p} d_{2p,2p} + h_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} + h_{2p+1,2p} d_{2p+1,2p} + h_{2p+1,2p+1} d_{2p+1,2p+1}$$

Donc :

$$\langle P_\alpha, D \rangle = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^k \varepsilon_k d_{k,k} + (\varepsilon_{2p,2p} d_{2p,2p} + \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p+1}) \cos(\alpha) + (\varepsilon_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} - \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p}) \sin(\alpha)$$

$$\text{Alors : } \langle P_\alpha, D \rangle = a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) - c \quad \text{Avec : } \begin{cases} a = \varepsilon_{2p,2p} d_{2p,2p} + \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p+1} \\ b = \varepsilon_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} - \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p} \\ c = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} \varepsilon_k d_{k,k} \end{cases}$$

Montrons finalement que $a > 0$, pour cela on va montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket, \varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

- Si $d_{k,k} > 0$ alors $|d_{k,k}| = d_{k,k}$ et $\varepsilon_k d_{k,k} = d_{k,k}$
- Si $d_{k,k} < 0$ alors $|d_{k,k}| = -d_{k,k}$ et $\varepsilon_k d_{k,k} = -d_{k,k}$
- Si $d_{k,k} = 0$ alors $|d_{k,k}| = 0$ et $\varepsilon_k d_{k,k} = 0$

On a montré que $\forall k \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket$, $\varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

Alors : $a = |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| > 0$ car $d_{2p+1,2p+1} \neq 0$

6-c-iii

$$|c| \leq a \Rightarrow \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

Et comme la fonction $x \rightarrow \sin(x)$ est surjective de \mathbb{R} vers l'intervalle $[-1, 1]$, alors :

$\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et en prenant $\alpha = \theta - \beta$ on déduit que :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta) = c$

6-c-iv

$$\sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^{p-2} (a_{2k+1} - a_{2k}) + a_{2p-1} \geq 0 \quad (\text{car la suite } (a_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante et positive})$$

Puis :

$$\begin{cases} a_{2p} = \sum_{k=1}^{p-1} (a_{2k+2} - a_{2k}) + a_2 \\ a_{2p+1} = \sum_{k=1}^{p-1} (a_{2k+1} - a_{2k-1}) + a_1 \end{cases} \Rightarrow a_{2p} + a_{2p+1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{2k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{p-1} (a_{2k+2} - a_{2k-1}) \right) + a_2$$

$$\Rightarrow a_{2p} + a_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} a_k + \left(\sum_{k=1}^{p-1} (a_{2k+2} - a_{2k-1}) \right) + a_2$$

Et comme : $(\sum_{k=1}^{p-1} (a_{2k+2} - a_{2k-1})) + a_2 \geq 0$ (car la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et positive)

Alors on déduit que :

$$\sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} a_k \leq a_{2p} + a_{2p+1}$$

6-c-v

D'après la question 6-c-i : $c = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} \varepsilon_k d_{k,k}$

Et on a montré que : que $\forall k \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket$, $\varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

Donc : $c = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} |d_{k,k}|$

On considère la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ définie par $d_k = |d_{k,k}|$ pour chaque k , alors cette suite est croissante et positive.

Donc d'après la question précédente on déduit que :

$$|c| = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} |d_{k,k}| \leq |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| = a$$

Alors d'après la question 6-c-iii.

$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha_0 + \beta) = c$

Puis :

$$\langle P_{\alpha_0}, D \rangle = \cos(\alpha_0) + b \sin(\alpha_0) - \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha_0 + \beta) = \sqrt{a^2 + b^2} ((\sin(\beta) \cos(\alpha_0) + \cos(\beta) \sin(\alpha_0)) - \sin(\alpha_0 + \beta)) = 0$$

6-c-vi

$$\langle P_{\alpha_0}, D \rangle = 0 \Rightarrow P_{\alpha_0} \in H_D \Rightarrow P_{\alpha_0} \in H_{\theta_U(Y)}$$

Et en utilisant le résultat de la question 4 on déduit que : $\theta_{t_U}(P_{\alpha_0}) \in H_Y$.

$$\text{Puis : } {}^t\theta_{t_U}(P_{\alpha_0})\theta_{t_U}(P_{\alpha_0}) = {}^t(UP_{\alpha_0} {}^tU)UP_{\alpha_0} {}^tU = I_n$$

On conclut que : $\theta_{t_U}(P_{\alpha_0}) \in O_n \cap H_Y$

6-v-iii

D'après la question précédente on déduit que si n est impaire alors tout hyperplan H_Y de E contient au moins une matrice $\theta_{t_U}(P_{\alpha_0})$ orthogonale.

Puis :

$$\det\left(\theta_{t_U}(P_{\alpha_0})\right) = \det(UP_{\alpha_0} {}^tU) = (\det(U))^2 \det(P_{\alpha_0}) = \det(P_{\alpha_0}) = \prod_{k=1}^{2p-1} (-1)^k \varepsilon_k \varepsilon_{2p} \varepsilon_{2p+1} = \pm 1$$

Si $\det\left(\theta_{t_U}(P_{\alpha_0})\right) = -1$ alors dans ce cas, il suffit de considérer la matrice $\theta_{t_U}(-P_{\alpha_0})$

Conclusion :

Si n est un nombre impair, alors tout hyperplan H_Y de E contient au minimum une matrice orthogonale positive : $\left(\theta_{t_U}(P_{\alpha_0})\right)$ ou $\left(\theta_{t_U}(-P_{\alpha_0})\right)$