Corrigé du Sujet Mathématiques (CNC) MPSI 2016 –Epreuve II

Partie I : Etude de quelques propriétés de l'application trace

1-a

Soient $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $N = (n_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *deux matrices de E et* λ *un scalaire de* $\mathbb{R}$ *alors :*

$Tr(\lambda M + N) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda m_{i,i} + n_{i,i}) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\right) + \sum_{i=1}^{n} n_{i,i} = \lambda Tr(M) + Tr(N)$

Donc Tr est une forme linéaire.

1-b

On pose $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$

D'abord : $AB = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *avec* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$, $BA = (d_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *avec* $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$

Alors : $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = Tr(BA)$

Puis on peut déduire d'après la définition de Tr que : $\forall\, M \in E : Tr(M) = Tr({}^tM)$

Alors : $Tr(BA) = Tr({}^t(BA)) = Tr({}^tA\,{}^tB)$

Finalement , on a montré que : $Tr(AB) = Tr(AB) = Tr({}^tA\,{}^tB)$

1-c

Comme Tr est une forme linéaire (application linéaire) alors : dimE = dimKerTr+dim(ImTr)

D'autre part , la dimension de l'image de Tr ne peut être que 1 car $ImT \subset IR$ *et l'application ne peut pas être nulle (il suffit de prendre* $M = I_n$*), alors :* $dimKerTr = n^2 - 1$

Ce qui veut dire que $KerTr$ *est un Hyperplan de E.*

1-d

$Vect(I_n)$ *est une droite vectorielle de E , alors* $dimVect(I_n) = 1$

Donc : $dimKerTr + dimVect(I_n) = n^2 = dimE$

Soit $M \in KerTr \cap Vect(I_n)$ *alors :*

$$\begin{aligned} M \in M \in KerTr \cap Vect(I_n) &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \ \ et\ Tr(M) = 0 \\ &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \ \ et\ n\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \ \ et\ \alpha = 0 \\ &\Rightarrow M = 0_E \end{aligned}$$

Donc : $KerTr \cap Vect(I_n) = \{0_E\}$

Finalement on a montré que : $E = KerTr \oplus Vect(I_n)$

1-e

D'abord d'après la question 2-c KerTr est un hyperplan

<u>Si n est pair :</u>

Il suffit de considérer la matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *avec* $\begin{cases} m_{i,i} = (-1)^i \\ m_{i,j} = 0 \ \ si\ i \ne j \end{cases}$

Cette matrice est inversible (toutes les colonnes sont indépendantes) et Tr(M) =0

Alors KerTr contient la matrice inversible M

<u>Si n est impair :</u>

Il suffit de considérer la matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *avec* $\begin{cases} m_{2,2} = 2 \\ m_{i,i} = (-1)^i \ si\ i \ne 2 \\ m_{i,j} = 0 \ \ si\ i \ne j \end{cases}$

Cette matrice est inversible (toutes les colonnes sont indépendantes) et Tr(M) =0

Alors KerTr contient la matrice inversible M

2-a

Comme φ *est un endomorphisme de E et E est de dimension finie, alors il suffit de montrer que* φ *est injective.*

Soit M une matrice de E

D'après la question 1-d on déduit que : $M \in E \Rightarrow \exists!\,(N;\alpha) \in KerTr \times \mathbb{R}\,;\, M = N + \alpha I_n$

Puis :

$M \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(M) = 0$

$\Rightarrow N + \alpha I_n + n\alpha I_n = 0$

$\Rightarrow N \in Vect(I_n)\ et\ N = -(1+n)\alpha I_n$

$\Rightarrow N = 0_E\ et\ N = -(1+n)\alpha I_n \quad car\ KerTr\ et\ Vect(I_n)\ sont\ en\ somme\ direct$

$\Rightarrow M = 0_E$

$\Rightarrow Ker\varphi = \{0_E\}$

$\Rightarrow \varphi\ est\ injective$

Finalement φ *est un automorphisme de E*

2-b-i

$M \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(M) = M$

$\Leftrightarrow M + tr(M)I_n = M$

$\Leftrightarrow tr(M)I_n = 0_E$

$\Leftrightarrow tr(M) = 0$

$\Leftrightarrow M \in KerTr$

Alors : $E_1 = KerTr$

2-b-ii

$M \in E_{n+1} \Leftrightarrow \varphi(M) = (n+1)M$

$\Leftrightarrow M = \left(\frac{Tr(M)}{n}\right) I_n$

$\Rightarrow M \in\ Vect(I_n)$

Donc ***:*** $E_{n+1} \subset Vect(I_n)$

D'autre part :

$M \in Vect(I_n) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n$

$\Rightarrow \varphi(M) = (n+1)\alpha I_n\ et\ M = \alpha I_n$

$\Rightarrow \varphi(M) = (n+1)M$

$\Rightarrow M \in E_{n+1}$

Donc : $Vect(I_n) \subset E_{n+1}$

Finalement : $E_{n+1} = Vect(I_n)$

2-b-iii

D'après la question 2-b-i on déduit que 1 est une valeur propre de φ *et que le sous-espace propre associé est* $E_1 = KerTr$

De même, D'après la question 2-b-ii on déduit que (n+1) est une valeur propre de φ *et qur le sous-espace propre associé est*

$E_{n+1} = Vect(I_n)$

Et d'après la question 1-d : $E = E_1 \oplus E_{n+1}$

Alors, on déduit que l'application linéaire φ *est diagonalisable*

3-a

Soit M une matrice de E et on pose : $P(X) = X^2 - 2X + 1$

Alors :

$P(\Psi)(M) = \Psi(\Psi(M)) - 2\Psi(M) + M = (M + Tr(M)J + Tr(M)J) - 2M - 2Tr(M)J + M = 0_E$

Donc : $\forall\ M\ \in E\ , P(\Psi(M)) = 0_E$

Ce qui veut dire que le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$ *est un polynôme annulateur de* Ψ

3-b

Comme le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$ *est un polynôme annulateur de* Ψ *, alors les valeurs propores* ***réelles*** *de l'application linéare* Ψ *sont à extraire des racines réelles du polynôme* P.

D'autre part, comme -1 est la seule racine réelle de P *,alors on déduit que -1 est la seule valeur propre de l'application* Ψ.

3-c

Si Ψ *est diagonalisable alors cela veut dire que E est la somme directe des sous-espaces propores associés aux différentes valeurs propres de* Ψ

Et comme -1 est la seule valeur propre de Ψ

Alors dans ce cas : $E = Ker(\Psi + I_d)$ *, avec* I_d *est l'application linéaire « identité ».*

Donc :

$$
\begin{aligned}
E = Ker(\Psi + I_d) &=> \forall M \in E\,, \Psi(M) + M = 0_E \\
&=> \forall M \in E\,, \Psi(M) + M = 0_E \\
&=> \forall M \in E\,, M = -\left(\frac{Tr(M)}{2}\right) J \\
&=> \forall M \in E\,, Tr(M) = 0 \\
&=> E \subset KerTr \text{ (ceci est une contradiction)}
\end{aligned}
$$

Finalement Ψ *n'est pas diagonalisable*

Partie II: Un premier résultat préliminaire

1-

D'abord il faut noter que F_1 *est un sev de F*

Montrons que v *est linéaire :*

Soient deux vecteurs x et y de F_1 *et λ un scalaire alors :*

$$v(\lambda x + y) = u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda v(x) + v(y)$$

Montrons que v est injective :

On note d'abord que Kerv $\subset F_1$

D'autre part , soit $x \in Kerv$ *alors :*

$$
\begin{aligned}
x \in Kerv &=> v(x) = 0 \\
&=> u(x) = 0 \\
&=> x \in Keru \\
&=> x \in F_1 \cap Keru \\
&=> x = 0 \ car \ F_1 \cap Keru = \{0_F\} \\
&=> Kerv = \{0_F\} \\
&=> v \text{ est injective}
\end{aligned}
$$

Puis :

$$
\begin{aligned}
F = F_1 \oplus Ker\,u &=> dim(E) = dim(F_1) + dim(Ker\,u) \\
&=> dim(E) = dim(F_1) + (dimE - dim(Im(u)) \\
&=> dim(F_1) = dim(Im(u))
\end{aligned}
$$

Finalement , on peut conclure v est un isomorphisme

2-a

La famille $(e_i)_{1\le i\le r}$ *est libre dans F , et comme l'application v est un automorphisme (en particulier : injective) alors la famille* $(v(e_i))_{1\le i\le r}$ *est libre dans Im(u), et comme G est de dimension finie , alors d'après le théorème de la base incomplète on peut compléter la* $(\varepsilon_i)_{1\le i\le r}$ *par une famille* $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m)$ *afin que* $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ *soit une base de G.*

2-b

D'abord par définition :

$$\begin{cases} u(e_i) = v(e_i) = \varepsilon_i \; pour \; i \in [\![1, r]\!] \\ u(e_i) = 0 \qquad pour \; i \in [\![r+1, p]\!] \end{cases}$$

Alors finalement : $Mat_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ou* I_r *est la matrice identité de* $M_r(\mathbb{R})$

3-

Soit M une matrice de $M_{m,P}(\mathbb{R})$.

On considère u l'application linière associé à cette matrice (de rang r) d'un espace vectoriel F de dimension m vers un espace vectoriel G de dimension p

D'après la question précédente, on a montré que la matrice M et la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_{m,p,r}$ *sont deux matrices de la même application linéaire relativement à deux couple de base , alors on déduit que les deux matrice M et* $J_{m,p,r}$ *sont équivalentes.*

Cela veut dire que : $\exists (S, T) \in GL_m(IR) \times GL_p(IR) tel\ que\ \ M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$

4-

On considère les mêmes notations que la question 2 et on note toujours que r est le rang d'une matrice M

Cas : $\boldsymbol{0 < r = p < m}$

Dans ce cas l'application u

$$\begin{aligned} u : F &\to Im(u) \\ x &\to u(x) \end{aligned}$$

Est un automorphisme (dans ce cas : u est surjective par définition et dimF= dim Im(u)) alors cela veut dire que :

$\forall i \in [\![1, p]\!] , u(e_i) = \varepsilon_i$

Alors : $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cas : $\boldsymbol{0 < r = m < p}$

Dans ce cas l'application : on considère le supplémentaire F_1 *de Keru , alors l'application v :*

$$\begin{aligned} v : F_1 &\to Im(u) = G \\ x &\to v(x) = u(x) \end{aligned}$$

est un automorphisme alors :

$$\begin{cases} u(e_i) = v(e_i) = \varepsilon_i \; pour \; i \in [\![1, m]\!] \\ u(e_i) = 0 \qquad pour \; i \in [\![m, p]\!] \end{cases}$$

Donc : $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cas : $\boldsymbol{0 < r = m = p}$

Dans ce cas la matrice M est inversible ce qui veut dire que l'application

$$\begin{aligned} u : F &\to G \\ x &\to u(x) \end{aligned}$$

Est un automorphisme de F vers G , alors cette application peut transférer la base $(e_i)_{1 \le i \le p}$ *vers une base* $(\varepsilon_i)_{1 \le i \le p}$ *de G.*

C'est-à-dire que : $\forall i \in [\![1, p]\!] , u(e_i) = \varepsilon_i$

Alors : $J_{m,p,r} = I_p$ *ou* I_p *est la matrice identité de* $M_p(\mathbb{R})$

Partie III: Un deuxième résultat préliminaire

1-

On considère des scalaires $(\alpha_1, \dots\dots, \alpha_s)$ *tel que :* $\sum_{i=1}^{S} \alpha_i l_i^* = 0$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i l_i^* = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \alpha_i l_i^* (l_j) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_i \delta_i^i = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i$$

Alors la famille $(l_1^*, \dots\dots, l_s^*)$ *est libre*

2-

Soit $x \in L$ *tel que* $x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i$ *et* $j \in [\![1, s]\!]$ *alors :*

$$x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i \Rightarrow l_j^*(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i\, l_j^*(l_i)$$
$$\Rightarrow l_j^*(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i\, \delta_j^i$$
$$\Rightarrow l_j^*(x) = x_j$$

Donc, on a montré que : $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $l_j^*(x) = x_j$

3-

Soit $h \in L^*$ *et* $x \in L$ *tel que* $x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i$ *alors :*

$h(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i h(l_i) = \sum_{i=1}^{s} h(l_i) l_i^*(x)$

Donc, on a montré que : $\forall\, x \in E$, $h(x) = \sum_{i=1}^{s} h(l_i) l_i^*(x)$

Ce qui veut dire que : $h = \sum_{i=1}^{s} h(l_i) l_i^*$

Alors la famille $(l_1^*, \dots\dots, l_s^*)$ *est génératrice de* L^*

4-

D'après les questions précédentes la famille $(l_1^*, \dots\dots, l_s^*)$ *est libre et génératrice de* L^* *, donc la famille* $(l_1^*, \dots\dots, l_s^*)$ *est une base de* L^*.

Finalement : $dim L^* = card\{l_1^*, \dots, l_s^*\} = s$

Partie IV: Une caractérisation d'une forme linéaire

1-

Soient M *et* N *deux matrices de* E *et* λ *un scalaire de* $\mathbb{R}$ *alors :*

$\Phi_A(\lambda M + N) = Tr(\lambda AM + AN) = Tr(\lambda AM) + Tr(AN) = \lambda Tr(AM) + Tr(AN)$

Donc, Φ_A *est une forme linéaire*

2-a

Soient A *et* B *deux matrices de* E *et* λ *un scalaire de* $\mathbb{R}$ *alors :*

$$\forall M \in E\ , h(\lambda A + B)(M) = \Phi_{\lambda A+B}(M) \Rightarrow \Phi_{\lambda A+B}(M) \Rightarrow \forall M \in E\ , h(\lambda A + B)(M) = Tr(\lambda AM + BM)$$
$$\Rightarrow \forall M \in E\ , h(\lambda A + B)(M) = \lambda Tr(AM) + Tr(AN)$$
$$\Rightarrow \forall M \in E\ , h(\lambda A + B)(M) = (\lambda \Phi_A + \Phi_B)(M)$$
$$\Rightarrow h(\lambda A + B) = \lambda h(A) + h(B)$$

Donc , h *est une application linéaire.*

2-b-i

Soient $A = (a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ *et* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ *alors :*

$\Phi_A(E_{i,j}) = Tr(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{n} a_{k,u}\, e_{u,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{n} a_{k,u}\, \delta_u^i \delta_k^j = a_{j,i}$

2-b-ii

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice de E*

Alors :

$A \in Ker\ h \Rightarrow \forall M \in E\ , \Phi_A(M) = 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\ , \Phi_A(E_{i,j}) = 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\ , a_{j,i} = 0$

$\Rightarrow A = 0_E$

Donc on a montré que $\ker h = \{0_E\}$, *ce qui veut dire que h est injective.*

2-c

D'abord d'après la partie III on déduit que : $dimE = dimE^*$ *, et comme h est injective , alors h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Partie V : Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

1-

D'abord : $dimVect(A) + dimH = 1 + (n^2 - 1) = dimE$

Puis, soit M une matrice de E

$M \in Vect(A) \cap H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ , \lambda A \in H\ \ et\ M = \lambda A$

Alors forcément $\lambda = 0$ *car si non A appartient à H*

Donc : $Vect(A) \cap H = \{0_E\}$

Finalement, on conclut que : $E = H \oplus Vect(A)$

2-

On considère une matrice A n'appartenant pas à H et l'application T de E vers $\mathbb{R}$ *définie par ::*

$$T:\ E \to \mathbb{R}$$
$$M = K_M + \lambda_M A \to T(M) = \lambda_M \quad avec\ (K_M, \lambda_M) est\ \ le\ couple\ définissantla\ décompositonde\ \ M\ sur\ H \oplus Vect(A)$$

<u>Montrons que T est une forme linéaire :</u>

Soient M *et N deux matrices de E et* α *un scalaire de* $\mathbb{R}$ *alors :*

$T(\alpha M + N) = \lambda_{\alpha M+N} = T((\alpha K_M + K_N) + (\alpha\lambda_M + \lambda_N)A) = \ \alpha\lambda_M + \lambda_N = \alpha T(M) + T(N)$

Alors , T est une forma linéaire , c'est-à-dire que T appartenant à E^*

<u>Déterminons KerT :</u>

$M \in KerT \Leftrightarrow T(M) = 0 \Leftrightarrow \lambda_M = 0 \Leftrightarrow M \in H$

Alors : KerT=H

D'autre part ,on a vu que l'applcation h (question 2-c) est un isomorphisme de E vers E^* *(en particulier h est surjective) , et comme T appartenant à* E^* *, alors :*

$\exists\ B \in E\ , h(B) = \Phi_B = T$

Finalement :

$\exists\ B \in E\ , H = KerT = Ker\Phi_B$

Partie VI: Tout hyperplan de E contient au moins une matrice orthogonale

Rappelons d'abord pourquoi la forme linéaire $\langle .,. \rangle$ *définie sur E est un produit scalaire :*
Soient $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *deux matrices de E.*

- *La linéarité de l'application* Tr *entraine le fait que* $\langle .,. \rangle$ *est bilinéaire*
- $\langle A, B\rangle = Tr(\,{}^tAB) = Tr(\,{}^t(\,{}^tAB)) = Tr(\,{}^tBA) = \langle B, A\rangle$
- $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{i,j}}^2 \ \ge 0$
- $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{i,j}}^2 = 0 \Rightarrow A = 0$

1-a

On pose $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *donc* ${}^tA = (d_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ $avec\ d_{i,j} = a_{j,i}$
Alors : ${}^tAB = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *avec* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, b_{k,j}$
Puis : $\langle A, B\rangle = Tr(\,{}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$
Finalement : $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}$

1-b

On considère une base $(e_1, \dots, e_{n^2-1})$ *d'un hyperplan H de E.*

Par la procédé de Gram-Schmidt (en prenant la norme euclidien associée au produit scalaire) on peut construire une base $(e'_1, \dots, e'_{n^2-1})$ *orthonormale de H à partir de la base* $(e_1, \dots, e_{n^2-1})$*Puis en appliquant le théorème de la base incomplète :* $\exists e'_{n^2} \in E\backslash H$ *, la famille* $(e'_1, \dots, e'_{n^2})$ *soit une base orthonormale de E.*

Dans ce cas , si on considère un vecteur Y appartenant au $Vect(e'_{n^2})$ *alors ce vecteur est orthogonal à tous les éléments de la base* $(e'_1, \dots, e'_{n^2-1})$ *de H , donc H est orthogonal à Y .*

1-c

Il est claire que θ_N *est un endomorphisme de E , il suffit de montrer qu'elle est injective.*
$M \in Ker\ \theta_N \Leftrightarrow \theta_N(M) = 0 \Leftrightarrow {}^tNMN = 0 \Leftrightarrow N\,{}^tNMN\,{}^tN = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow Ker\ \theta_N = \{0_E\}$
Donc finalement θ_N *est un endomorphisme injective de E (dimension finie) alors* θ_N *est un automorphisme*

1-d

Soit P de E :

- $\theta_{N_1} o \theta_{N_2}(P) = \theta_{N_1}(\,{}^tN_2PN_2) = {}^t(N_2N_1)PN_2N_1 = \theta_{N_2N_1}(P)$
- $\theta_{\,{}^tN_1} o \theta_{N_1}(P) = \theta_{\,{}^tN_1N_1}(P) = P \Rightarrow \theta_{\,{}^tN_1} o \theta_{N_1} = I_d \Rightarrow (\theta_{N_1})^{-1} = \theta_{\,{}^tN_1}$

2-

θ_N réduit à O_n *est un morphisme de de groupe* $(O_n, \times)$

Soit N et M de O_n *alors :*

- $M \in Ker\ \theta_N \Leftrightarrow \theta_N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow \theta_N$ *est injective de*
- $\theta_N(P) = M \Leftrightarrow {}^tNPN = M \Leftrightarrow P = NM\,{}^tN$ *puis* ${}^tPP = {}^t(NM\,{}^tN)(NM\,{}^tN) = I_n$
  On déduit que : $\forall M \in O_n\ \exists P \in O_n$ *telle que* $\theta_N(P) = M$ *ce qui veut dire que* θ_N *est surjective*

3- *On procédé comme la question 2*

4-
$\langle \theta_N(P), \theta_N(Y)\rangle = Tr(\,{}^tPY) = \langle P, Y\rangle$ *, ce qui implique que :* $P \in H_Y \Leftrightarrow \theta_N(P) \in H_{\theta_N(Y)}$

5-a :

Soit $P \in O_n \cap S_n \cap H_Y$ *alors :*
$$\langle P, Y_S\rangle = \frac{1}{2}\langle P, Y\rangle + \frac{1}{2}\langle P,\ {}^tY\rangle = \frac{1}{2}\langle P,\ {}^tY\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(\ {}^tP\ {}^tY\right) = \frac{1}{2}Tr\left(P\ {}^tY\right) = \frac{1}{2}\langle P, Y\rangle = 0$$
Donc : $O_n \cap S_n \cap H_Y \subset O_n \cap S_n \cap H_{Y_S}$

Soit $P \in O_n \cap S_n \cap H_{Y_S}$ *alors :*
$$\langle P, Y_S\rangle = \frac{1}{2}\langle P, Y\rangle + \frac{1}{2}\langle P,\ {}^tY\rangle = \langle P, Y\rangle = 0$$
Donc : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} \subset O_n \cap S_n \cap H_Y$

Finalement : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} = O_n \cap S_n \cap H_Y$

5-b

La matrice Y_S *est symétrique à coefficients réelles, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de l'espace euclidien* (E, $\langle .,. \rangle$)
Ce qui veut dire que : $\exists U \in O_n\ tel\ que\ Y_S\ = UY'\ {}^tU$ *avec* Y' *est une matrice diagonale*
Ce qui implique que : $Y' =\ {}^tUY_SU = \theta_U(Y_S)$

5-c

- *La matrice* $Q = \left(q_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ *(est clairement symétrique)*
- $Y' = diag\left(y_{i,i}\right)\ avec\ i \in [\![1,n]\!]$ *donc* $\langle Q, Y'\rangle = Tr(QT) = \sum_{j=1}^{n} y_{i,i}\, q_{i,i} = 0$ *alors* $Q \in H_{Y'}$
- ${}^tQQ = Q^2 = I_n$, *donc* $Q \in O_n$

Finalement, $Q \in O_n \cap S_n \cap H_{Y'}$

5-d

En utilisant la question 4 on déduit que :
$Q \in O_n \cap S_n \cap H_{Y'} \Rightarrow Q \in H_{Y'}$
$\Rightarrow Q \in H_{\theta_U(Y_S)}$
$\Rightarrow \theta_{\ {}^tU}(Q) \in H_{\theta_{\ {}^tU}(\theta_U(Y_S))}$ *(résultat de la question 4)*
$\Rightarrow \theta_{\ {}^tU}(Q) \in H_{Y_S}$ *(Formule de la question 1-d)*
Alors $\theta_{\ {}^tU}(Q) \in H_{Y_S}$

Puis par un simple calcul on montre que la matrice $\theta_{\ {}^tU}(Q)$ *est orthogonale et symétrique.*
Et comme d'après la question 5-a : $O_n \cap S_n \cap H_{Y_S} = O_n \cap S_n \cap H_Y$
Alors on conclut que : $\theta_{\ {}^tU}(Q) \in O_n \cap S_n \cap H_Y$

5-e

Conclusion directe de la question 5-d , il suffit de considérer la matrice $\theta_{\ {}^tU}(Q)$

6-a

En faisant permuter les coefficients diagonaux de la matrice Y *afin de les ordonner de telle façon qu'on ait la relation demandée et ceci revient à transformer la matrice* Y *par des matrice orthogonales*

Posons $Y = \left(y_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ *et* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1 étape :

Si $|y_{1,1}| > |y_{2,2}|$ *alors :*

On transforme la matrice Y *vers la matrice* $Y_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ *, cette matrice va permettre de permuter uniquement les deux coefficients* $y_{1,1}$ *et* $y_{2,2}$

2- étape :

Si $|y_{3,3}| < |y_{2,2}|$ *mais* $|y_{3,3}| > |y_{1,1}|$ *alors on va transformer la matrice* Y_1 *vers* $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} Y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ *de permuter uniquement les coefficients* $y_{3,3}$ *et* $y_{2,2}$

Si $|y_{3,3}| < |y_{1,1}| < |y_{2,2}|$ *alors on va transformer* Y_1 *deux fois vers une matrice :*

$$Y_2 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} Y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

Puis on va procéder de la même manière pour l'ensemble des coefficients diagonaux , ainsi on va transformer Y *par des matrices orthogonales et symétriques* R_j *avec* $j \in IN$ *vers une matrice* $D = \left(\prod_{j\in IN} R_j\right) Y \left(\prod_{j\in IN} R_j\right)$ *dont ses coefficients vérifient la relation demandée.*

Alors en posant : $U = \left(\prod_{j\in IN} R_j\right)$ *on déduit que* $D = \theta_U(Y)$

6-b

Si $d_{n,n} = 0$ *alors tous les coeffeicent diagonaux de la matrice* D *sont nuls, ce qui veut dire que les coefficients diagonaux de* Y *le sont aussi.*

Il suffit de considérer la matrice identité I_n *, elle est orthogonales et positive et en plus :* $\langle I_n, Y\rangle = Tr(Y) = 0$ *, ce qui veut dire que* I_n *appartient à l'orthogonal de* Y (H_Y)

6-c-i

En effectuant le calcul par bloc :

$${}^tP_\alpha P_\alpha = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & {}^tA_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & A_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2p-1} & 0 \\ 0 & {}^tA_\alpha A_\alpha \end{pmatrix} = I_{2P+1}$$

6-c-ii

On pose $P_\alpha = (h_{i,j})_{1\le i,j\le 2p+1}$ *et* $= (d_{i,j})_{1\le i,j\le 2p+1}$ *, alors :*

$$\langle P_\alpha, D\rangle = \sum_{i=1}^{2p+1}\sum_{k=1}^{2p+1} h_{k,i}\, d_{k,i} = \sum_{i=1}^{2p-1}\sum_{k=1}^{2p-1} h_{k,i}\, d_{k,i} + h_{2p,2p} d_{2p,2p} + h_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} + h_{2p+1,2p} d_{2p+1,2p} + h_{2p+1,2p+1} d_{2p+1,2p+1}$$

Donc :

$$\langle P_\alpha, D\rangle = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^k \varepsilon_k d_{k,k} + \left(\varepsilon_{2p,2p} d_{2p,2p} + \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p+1}\right) cos(\alpha) + \left(\varepsilon_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} - \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p}\right) sin(\alpha)$$

Alors : $\langle P_\alpha, D\rangle = acos(\alpha) + bsin(\alpha) - c$ *Avec :* $\begin{cases} a = \varepsilon_{2p,2p} d_{2p,2p} + \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p+1} \\ b = \varepsilon_{2p,2p+1} d_{2p,2p+1} - \varepsilon_{2p+1} d_{2p+1,2p} \\ c = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} \varepsilon_k d_{k,k} \end{cases}$

Montrons finalement que $a > 0$ *, pour cela on va montrer que :* $\forall k \in [\![1, 2p+1]\!]$ *,* $\varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

- *Si* $d_{k,k} > 0$ *alors* $|d_{k,k}| = d_{k,k}$ *et* $\varepsilon_k d_{k,k} = d_{k,k}$
- *Si* $d_{k,k} < 0$ *alors* $|d_{k,k}| = -d_{k,k}$ *et* $\varepsilon_k d_{k,k} = -d_{k,k}$
- *Si* $d_{k,k} = 0$ *alors* $|d_{k,k}| = 0$ *et* $\varepsilon_k d_{k,k} = 0$

On a montré que $\forall k \in [\![1,2p+1]\!]$, $\varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

Alors : $a = |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| > 0 \ car\ d_{2p+1,2p+1} \neq 0$

6-c-iii

$|c| \leq a \Rightarrow \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$

Et comme la fonction x->sin(x) est surjective de $\mathbb{R}$ *vers l'intervalle* $[-1,1]$, *alors :*

$\exists \theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ sin(\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *et en prenant* $\alpha = \theta - \beta$ *on déduit que :*

$\exists \alpha \in \mathbb{R}\ tel\ que \sqrt{a^2+b^2}\, sin(\alpha+\beta) = c$

6-c-iv

$\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}a_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^{p-2}(a_{2k+1} - a_{2k}) + a_{2p-1} \geq 0$ *(car la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$*est croissante et positive)*

Puis :

$$\begin{cases} a_{2p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k+2} - a_{2k}) + a_2 \\ a_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k+1} - a_{2k-1}) + a_1 \end{cases} \Rightarrow a_{2p} + a_{2p+1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{2k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k+2} - a_{2k-1})\right) + a_2$$

$$\Rightarrow a_{2p} + a_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}a_k + \left(\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k+2} - a_{2k-1})\right) + a_2$$

Et comme : $\left(\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k+2} - a_{2k-1})\right) + a_2 \geq 0$ *(car la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$*est croissante et positive)*

Alors on déduit que :

$$\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}a_k \leq a_{2p} + a_{2p+1}$$

6-c-v

D'après la question 6-c-i : $c = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}\varepsilon_k d_{k,k}$

Et on a montré que : que $\forall k \in [\![1,2p+1]\!]$, $\varepsilon_k d_{k,k} = |d_{k,k}|$

Donc : $c = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}|d_{k,k}|$

On considère la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $d_k = |d_{k,k}|$ *pour chaque k , alors cette suite est croissante et positive.*

Donc d'après la question précédente on déduit que :

$$|c| = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}|d_{k,k}| \leq |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| = a$$

Alors d'après la question 6-c-iii .

$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}\ tel\ que \sqrt{a^2+b^2}\, sin(\alpha_0+\beta) = c$

Puis :

$\langle P_{\alpha_0}, D\rangle = \mathrm{a}\cos(\alpha_0) + b\sin(\alpha_0) - \sqrt{a^2+b^2}\, sin(\alpha_0+\beta) = \sqrt{a^2+b^2}\big((\sin(\beta)\cos(\alpha_0) + \cos(\beta)\sin(\alpha_0)) - sin(\alpha_0+\beta)\big) = 0$

6-c-vi

$\langle P_{\alpha_0}, D\rangle = 0 \Rightarrow P_{\alpha_0} \in H_D \Rightarrow P_{\alpha_0} \in H_{\theta_U(Y)}$

Et en utilisant le résultat de la question 4 on déduit que : $\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0}) \in H_Y$.

Puis : ${}^t\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0})\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0}) = {}^t(UP_{\alpha_0}\ {}^tU)UP_{\alpha_0}\ {}^tU = I_n$

On conclut que : $\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0}) \in O_n \cap H_Y$

6-v-iii

D'après la question précédente on déduit que si n est impaire alors tout hyperplan H_Y *de E contient au moins une matrice* $\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0})$ *orthogonale.*

Puis :

$$\det\left(\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0})\right) = \det(UP_{\alpha_0}\ {}^tU) = (\det(U))^2 \det(P_{\alpha_0}) = \det(P_{\alpha_0}) = \prod_{k=1}^{2p-1}(-1)^k\ \varepsilon_k\varepsilon_{2p}\varepsilon_{2p+1} = \pm 1$$

Si $\det\left(\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0})\right) = -1$ *alors dans ce cas, il suffit de considérer la matrice* $\theta\ _{{}^tU}(-P_{\alpha_0})$

<u>Conclusion :</u>

Si n est un nombre impair, alors tout hyperplan H_Y *de E contient au minium une matrice orthogonale positive :* $\left(\theta\ _{{}^tU}(P_{\alpha_0})\right)$ *ou* $\left(\theta\ _{{}^tU}(-P_{\alpha_0})\right)$