Correction Sujet Maths MP II (Mines-Ponts :2017)

A-Préliminaires sur les matrices symétriques

1-

D'abord soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ alors $Sp(S) \neq \emptyset$ (car toute matrice symétrique réelle est diagonalisable)

Supposons que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit λ une valeur propre de S avec X son vecteur propre associé

Alors dans cas : $X^\top SX = \lambda\|X\|^2 > 0$ ce qui implique que $\lambda > 0$

Maintenant supposons que $\forall \lambda \in Sp(S), \lambda > 0$ puis on considère une base $B = (X_1, \dots, X_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres (unitaires) de S et qui sont associés respectivement aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ alors $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$

Alors : $X^\top SX = \sum_{i=1}^n \lambda_1 {a_i}^2 > 0$

On conclut que : $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si est seulement si $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$

2-

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors S est diagonalisable et $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$ dans cas :

$\exists\, P \in O_n(\mathbb{R}) : P^\top DP$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \in Sp(S)$

On considère la matrice R définie par : $R = BP$ avec $= diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, il est claire que cette matrice appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ (produit deux matrices inversibles)en plus :

$R^\top R = (BP)^\top BP = P^\top DP = S$

Montrons maintenant la réciproque : soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$

Il est clair que la matrice $R^\top R \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ ce qui implique que $0 \notin Sp(R^\top R)$

D'autre part : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$; $X^\top R^\top RX = \|RX\|^2 \geq 0$

Puis soit λ une valeur propre de $R^\top R$ avec Y son vecteur propre associé

Donc : $Y^\top R^\top RY = \lambda\|Y\|^2 > 0$ ce qui implique que $Sp(R^\top R) \subset \mathbb{R}^{*+}$

Et d'après la question 1 on conclut que $\mathrm{R}^\top \mathrm{R} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

3 - Soit $A, B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0,1]$

- $(\lambda A + (1-\lambda)B)^\top = \lambda A + (1-\lambda)B \in S_n(\mathbb{R})$
- $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda\, X^\top AX + (1-\lambda)\, X^\top BX > 0$ ce qui implique $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On conclut que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe

B-Autres Préliminaires

4-

On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \quad \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$$

$$\big(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_1, \dots, x_{n+1})\big) \to \Phi(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_j$$

- Montrons que l'application Φ est continue :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_i, \dots, x_{n+1}))$,$(\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), y = (y_1, \dots, y_{n+1})) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ alors :

- $\Phi(\lambda + \beta, x) = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i + \beta_i) x_i = \Phi(\lambda, x) + \Phi(\beta, x)$
- $\Phi(\lambda, x + y) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (x_i + y_i) = \Phi(\lambda, x) + \Phi(\lambda, y)$
- $\Phi(\alpha\lambda, x) = \Phi(\lambda, \alpha x) = \alpha\Phi(\lambda, x)$

Alor l'application Φ bilinéaire, alors elle est continue (puisque on est en dimension finie)

- Montrons que l'application $\Phi(H \times K^{n+1}) = Conv(K)$:

D'abord

$$\Phi(H \times K^{n+1}) = \left\{ y \in E \text{ tel que } \exists\big(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_i, \dots, x_{n+1})\big) \in H \times K^{n+1}, y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_j \right\}$$

Alors il est clair que par définition de Conv(K) : $\Phi(H \times K^{n+1}) \subset Conv(K)$

D'autre part $\Phi(H \times K^{n+1})$ est un convexe : en effet soient $\alpha \in [0,1]$ et $(x, y) \in \Phi(H \times K^{n+1})^2$

Puis : $(\alpha, 1-\alpha, 0, 0 \dots, 0) \in H$ et $(x, y, y, y, \dots, y) \in K^{n+1}$

alors $\Phi\Big(\big((\alpha, 1-\alpha, 0, 0 \dots, 0), (x, y, y, y, \dots, y)\big)\Big) = \alpha x + (1-\alpha)y$ ce qui prouve $\Phi(H \times K^{n+1})$ est un convexe de K puis comme conv(K) est le plus petit convexe de K au sens de l'inclusion on déduit que $\Phi(H \times K^{n+1}) = Conv(K)$

- Montrons que Conv(K) est compact de E

D'abord comme K est compact alors K^{n+1} est compact

Puis il est claire que H est compact car :

- H est borné : $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in H$, $\|\lambda\|_\infty = max_{i\in\mathbb{N}}|\lambda_i| \leq 1$
- H est fermé : Soit $\lambda^{(m)} = \left(\lambda_1{}^{(m)}, \ldots, \lambda_n{}^{(m)}\right) \in H$ une suite qui converge vers $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

  « On note d'abord que tous les λ_i sont positifs »

  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i{}^{(m)} = 1$ implique par passage à la limite $(m \to +\infty)$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

  alors $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in H$

Alors on déduit que $H \times K^{n+1}$ est un compact et puisque Φ est continue , donc on déduit que Conv(K) est compact de E

5-

On considère $B = (e_1, e_n, \ldots e_n)$ une base orthonormée de E

D'abord $\forall i \neq j \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \langle g(e_i), g(e_j)\rangle = 0$

Puis : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $\langle e_1 + e_i, e_1 - e_i\rangle = 1 - 1 = 0$ ce qui implique que :
$\forall i \in [\![2,n]\!], \langle g(e_1 + e_i), g(e_1 - e_i)\rangle = 0$

D'autre part $\forall i \in [\![2,n]\!], \langle g(e_1 + e_i), g(e_1 - e_i)\rangle = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$

Alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\|g(e_i)\| = k$ avec $k = \|g(e_1)\|$

Maintenant soit $x \in E$ alors : $\exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n a_i\, e_i$

$x = \sum_{i=1}^n a_i\, e_i \Rightarrow g(x) = \sum_{i=1}^n a_i\, g(e_i)$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i{}^2$

Puis d'autre part : $\|g(x)\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n a_i\, g(e_i), \sum_{i=1}^n a_i\, g(e_i)\ \rangle = k^2(\sum_{i=1}^n a_i{}^2) = k^2\|x\|^2$

Finalement on conclut que : $\exists k \geq 0, \forall x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$

Si $k = 0$ alors g est nulle (alors c'est évident que g est la composée de l'homothétie de rapport nul avec n'importe quel endomorphisme orthogonal)

Si $k > 0$

On considère les deux applications u et h définies par :

$$u : E \to E \qquad\qquad h : E \to E$$
$$x \to \frac{1}{k} g(x) \qquad\qquad x \to kx$$

L'application u est un endomorphisme orthogonal (car $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$) et il est claire que l'application h est une homothétie de rapport k , puis $\forall x \in E$, $hou(x) = g(x)$

Ce qui veut dire que g est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un endomorphisme orthogonal

6-

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{Tr(I_n)} = \sqrt{n}$ ce qui implique que $O_n(\mathbb{R})$ est bornée de $GL_n(\mathbb{R})$

Puis on considère une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A

D'abord soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $M_n(\mathbb{R})$, il est claire qui $M_p \to 0$ alors $M_p{}^\top \to 0$

Alors ce qui implique que $\left(A_p{}^\top\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\top$

Donc : $A^\top A = \lim_{p\to+\infty} A_p{}^\top A_p = I_n$ ce qui veut dire que $A \in O_n(\mathbb{R})$

Alors on a montré que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$

On conclut alors $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $GL_n(\mathbb{R})$

B-Quelques propriétés de la compacité

7- Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un a (avec φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)

Alors comme $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ alors $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geq \varepsilon$

Comme l'application $\|\ \| : E \to \mathbb{R}^+$ est continue et par passage à la limite on déduit que :

$0 < \epsilon \leq \|a - a\| = 0$ et ceci est une contradiction

On conclut que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune suite extraite convergente

8-

Supposons $\exists \varepsilon > 0$, $K \not\subset \cup_{i\in I} B(a_i, \varepsilon)$ avec $a_i \in E$ et I un ensemble quelconque de IN

Soit $x_1 \in K$ et $x_2 \in K \backslash B(x_0, \varepsilon)$ ainsi on peut construire une suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in K \backslash \cup_{i\in[\![1,n]\!]} B(x_i, \varepsilon)$ l'existence d'une infinité de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le fait $K \not\subset \cup_{i\in I} B(a_i, \varepsilon)$

Ainsi pour tous entier naturels $n \neq p$, $\|x_n - x_p\| > \varepsilon$ donc en utilisant la question précédente on déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune suite extraite convergente et ceci est une contradiction avce le fait que K est compact

9- $(\Omega_i)_{i\in I}$ famille des sous-ensembles ouverts de E, I est un ensemble quelconque

Tel que $K \subset \bigcup_{i\in I}\Omega_i$

Supposons $\forall\alpha > 0\ \exists x \in K$, tel que $\forall i \in I$, $B(x,\alpha) \not\subset \Omega_i$ donc pour $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I$, $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \Omega_i$

Comme K est compact alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suit extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α de K

Alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I$, $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \not\subset \Omega_i$ donc par passage à la limite et en utilisant le fait que l'application norme est continue alors $\forall i \in I$, $\forall\varepsilon > 0$, $B(\alpha,\varepsilon) \not\subset \Omega_i$ ce qui veut $\forall i \in I$, $\alpha \notin \mathrm{int}(\Omega_i)$ et comme $\forall i \in I$ $\mathrm{int}(\Omega_i) = \Omega_i$(car les Ω_i sont des ouverts) on déduit que $\forall i \in I$, $\alpha \notin \Omega_i$ ce qui implique de , $\alpha \notin K$ et ceci est une contradiction

10 -

D'abord $\overline{\bigcap_{i\in I} F_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{F_i} = E$

Comme $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés alors $\bigcup_{i\in I}\overline{F_i}$ est une réunion de de famille d'ouverts

D'autre part $K \subset \bigcup_{i\in I}\overline{F_i}$ donc d'après la question précédente il existe une famille finie $(F_{i_1},..,F_{i_p})$ de fermés tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p}\overline{F_{i_p}}$ ce qui implique $K \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{p} F_{i_p}}$ puis comme $\bigcap_{i=1}^{p} F_{i_p} \subset K$

Alors on déduit que $\bigcap_{i=1}^{p} F_{i_p} = \emptyset$

D-Théorème du point fixe du Markov-Kakutani

11- Soit $\in E$, on considère l'application H_x définie par :

$$H_x : GL(E) \to E$$
$$u \to u(x)$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in GL(E)$ alors : $H_x(\lambda u + v) = \lambda u(x) + v(x) = \lambda H_x(u) + H_x(v)$, alors H_x est linière et comme E et $GL(E)$ sont de dimension finie alors H_x est continue

Alors comme G est un compact de $GL(E)$ alors $H_x(G)$ est un compact de E

D'autre part : $Sup_{u\in G}\|u(x)\| = Sup_{y\in H_x(G)}\|y\|$ donc comme l'application $\|\ \| : E \to \mathbb{R}^+$ est continue et $H_x(G)$ est un compact alors $\exists y_0 \in H_x(G)$, $Sup_{y\in H_x(G)}\|y\| = \|y_0\|$ ce qui implique que $\exists u_0 \in G, Sup_{u\in G}\|u(x)\| = \|u_0(x)\|$

On conclut que : $N_G(x) = Sup_{u\in G}\|u(x)\|$ est bien définie pour tout x appartenant à E

Montrons maintenant que N_G est une norme

- Il est claire que $N_G(x) \geq 0$
- Puis si $N_G(x) = 0$ alors $\forall\, u \in G$, $u(x) = 0$ ce qui implique $x = 0$ (l'injectivité des u)
- Il est claire que $\forall\, x, y \in E$e t $u, \in G$, $\|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$ ce qui implique que $N_G(x + y) \leq Sup_{u\in G}(\|u(x)\| + \|u(y)\|) = Sup_{u\in G}(\|u(x)\|) + Sup_{u\in G}(\|u(y)\|) = N_G(x) + N_G(y)$

Alors on conclut que N_G est une norme sur E

12-

- Montrons que : $\forall\, u \in G, \forall x \in E, N_G(u(x)) = N_G(x)$

$$N_G(u(x)) = Sup_{v\in G}\|v(u(x))\| = Sup_{v\in G}\|vou(x)\| = \underbrace{Sup_{gu^{-1}\in G}\|g(x)\| = Sup_{g\in G}\|g(x)\|}_{car\ G\ est\ sous\ groupe} = N_G(x)$$

- Montrons que pour tous $x, y \in E$: $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y) <=> \exists\lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$

  Soient $x, y \in E$
- Montrons (<=)

Si $\exists\lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$ alors $N_G(x + y) = Sup_{u\in G}\|u(x + y)\| = (1 + \lambda)Sup_{u\in G}\|u(x)\| = N_G(x) + N_G(\lambda x) =$

Alors $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$

Correction Sujet Maths MP II (Mines-Ponts :2017)

- *Montrons (=>)*

  Soient $x,y \in E$ *et* $u \in G$ *avec* x *non nul*

$\|u(x+y)\|^2 = \langle u(x)+u(y), u(x)+u(y)\rangle = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2\langle u(x), u(y)\rangle$

Et comme $Sup_{u\in G}\|u(x+y)\|^2 = (Sup_{u\in G}\|u(x+y)\|)^2$

$$\text{et } \begin{cases} Sup_{u\in G}(\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2\langle u(x),u(y)\rangle) \le Sup_{u\in G}\|u(x)\|^2 + Sup_{u\in G}\|u(y)\|^2 + 2Sup_{u\in G}|\langle u(x),u(y)\rangle| \\ Sup_{u\in G}\|u(x)\|^2 = (Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2 \\ Sup_{u\in G}\|u(y)\|^2 = (Sup_{u\in G}\|u(y)\|)^2 \end{cases}$$

Alors : $(Sup_{u\in G}\|u(x+y)\|)^2 \le (Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2 + (Sup_{u\in G}\|u(y)\|)^2 + 2Sup_{u\in G}|\langle u(x),u(y)\rangle|$ ***(*)***

Puis comme : $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ *alors*

$(Sup_{u\in G}\|u(x+y)\|)^2 = (Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2 + (Sup_{u\in G}\|u(y)\|)^2 + 2\,(Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2(Sup_{u\in G}\|y(x)\|)^2$

D'autre part : $(Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2(Sup_{u\in G}\|y(x)\|)^2 = Sup_{u\in G}\|u(x)\|^2\|u(y)\|^2$

Alors :

$(Sup_{u\in G}\|u(x+y)\|)^2 = (Sup_{u\in G}\|u(x)\|)^2 + (Sup_{u\in G}\|u(y)\|)^2 + 2\,Sup_{u\in G}\|u(x)\|^2\|u(y)\|^2$ ***(**)***

De la relation (*)et la relation (**) on déduit que : $Sup_{u\in G}\|u(x)\|^2\|u(y)\|^2 \le Sup_{u\in G}|\langle u(x),u(y)\rangle|$

Ceci implique : $\exists\, v \in G\,, \|v(x)\|^2\|v(y)\|^2 \le |\langle v(x),v(y)\rangle|$

Puis en utilisant la relation de Cauchy-Schwartz : , $|\langle v(x),v(y)\rangle| \le \|v(x)\|^2\|v(y)\|^2$

Ce qui implique $|\langle v(x),v(y)\rangle| = \|v(x)\|^2\|v(y)\|^2$ *alors on sait que dans le cas égalité de la relation Cauchy-Schwartz les deux vecteurs* $v(x)$*et* $v(y)$ *doivent être linéaires ce qui veut dire que* $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ v(y) = \lambda v(x) = v(\lambda x)$ *ce qui implique* $y = \lambda x$ *(car* v *est injective)*

D'autre part :

$N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y) \Rightarrow |1+\lambda| = 1 + |\lambda|$ *(car* $x \neq 0$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$

Finalement on a montré que : $\lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$

13-

Soit $x \in K$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$

Comme K est stable par u alors : $\forall\ i \in [\![0, n-1]\!], u^i(x) \in K$

D'autre part on considère les scalaires a_i *tel que :* $i \in [\![0, n-1]\!]\,, a_i = \frac{1}{n}$ *alors* $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$

Puis comme $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, u^i(x)$ *et K est convexe alors* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, x_n \in$

Puis comme K est un compact alors on peut extraire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite* $x_{\varphi(n)}$ *convergente vers un élément a de K avec (avec* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *verifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \ge n$*)*

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \|u(x_n) - x_n\| \le \frac{\delta(K)}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)\right\| = \frac{1}{n}\left\|\underbrace{u^n(x)}_{\in K} - x\right\| \le \frac{\delta(K)}{n}$$

Alors on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \le \frac{\delta(K)}{\varphi(n)}$

Et comme $\|\ \| : E \to \mathbb{R}^+$ *et l'endomorphisme u est continue (application linéaire en dimension finie) et* $\lim_{n\to\infty}\frac{\delta(K)}{\varphi(n)} = 0$

Alors par passage à la limite on déduit que $\|u(a) - a\| = 0$ *ce qui veut dire que* $(a) = a$ *, alors on conclut que l'élément a de K est un point fixe de u*

14-

Soit $x \in K$

On considère les scalaires a_i *tel que :* $i \in [\![1, r]\!]\,, a_i = \frac{1}{r}$ *alors* $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$ ·

D'autre part $\forall i \in [\![1, r]\!]\,, u_i(x) \in K$ *et* $u(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i\, u_i(x)$

Et comme K est convexe alors $u(x) \in K$

Ce qui prouve que K est stable par u

Puis on a les conditions de la question 13 : K compact, convexe et stable par u alors on déduit qu'il existe un élément a de K tel que : $u(a) = a$

15-

d'abord : $N_G(u(a)) = N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G(a)$

Puis d'après la question 12 : $\forall i \in [\![1, r]\!]\,, N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ *alors* $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(a)$

Finalement on déduit que : $N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$

Puis en utilisant la question

$$N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}u_i(a)\right)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}N_G\big(u_i(a)\big) \Rightarrow N_G\left(\sum_{i=1}^{r}u_i(a)\right)=\sum_{i=1}^{r}N_G\big(u_i(a)\big)$$

$$\Rightarrow N_G\left(u_j(a)+\sum_{i=1,i\neq j}^{r}u_i(a)\right)=N_G(u_j(a))+\sum_{i=1,i\neq j}^{r}N_G\big(u_i(a)\big)$$

16 - Si a est nul alors l'existence de λ_j est évident

Supposons que a est non nul :

Alors on pose : $x=u_j(a)$ et $y=\sum_{i=1,i\neq j}^{r}u_i(a)$ alors dans ce cas on $N_G(x+y)=N_G(x)+N_G(x)$

Donc en utilisant le résultat deux de la question 12 on déduit :

$\exists\ \lambda_j\geq 0\ ,\sum_{i=1,i\neq j}^{r}u_i(a)=\ \lambda_j\ u_j(a)$ ce qui implique que $\sum_{i=1}^{r}u_i(a)=(\ \lambda_j+1)\ u_j(a)$

Finalement on déduit que : $u(a)=\frac{\lambda_j+1}{r}u_j(a)$

17 -

- Si a est nul alors il est évident que a est un point fixe pour l'ensemble des endomorphismes u_i avec $i\in[\![1,r]\!]$

- Supposons maintenant que a est non nul

De la question 16 on déduit que : $\forall i\in[\![1,r]\!]\ ,\exists\ \lambda_i\geq 0\ ,u(a)=\frac{\lambda_i+1}{r}u_i(a)=a$

Alors cela implique que : $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i+1}=1$

On pose : $\lambda_m+1=min_{i\in[\![1,r]\!]}(\lambda_i+1)$

Alors : $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i+1}=1 \Rightarrow 0<\frac{\lambda_m+1}{r}\leq 1$

Supposons que $\frac{\lambda_m+1}{r}<1$

Comme $\frac{\lambda_m+1}{r}u_m(a)=a$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(\frac{\lambda_m+1}{r}\right)^n u_m^n(a)=a$

D'autre part $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_m^n(a)\in K$ et K borné (car il est compact) ce qui implique :

$\exists M\geq 0,\forall n\ \mathbb{N}^*,\left\|\left(\frac{\lambda_m+1}{r}\right)^n u_m^n(a)\right\|\leq M\left(\frac{\lambda_m+1}{r}\right)^n$

Alors : $\forall n\ \mathbb{N}^*,\ \|a\|\leq\ M\left(\frac{\lambda_m+1}{r}\right)^n$ et par passage à la limite on déduit que $a=0$

Donc ceci est une contradiction ce qui vaut dire que : $\lambda_m+1=min_{i\in[\![1,r]\!]}(\lambda_i+1)=r$

Ce qui implique que $\forall\ i\in[\![1,r]\!]\ ,\frac{1}{\lambda_i+1}\leq\frac{1}{r}$

Supposons que $\exists\ j\ \in\ [\![1,r]\!]\ ,\frac{1}{\lambda_j+1}<\frac{1}{r}$ alors $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i+1}<1$ alors ceci est une contradiction

On a montré que $\forall i\in[\![1,r]\!]\ ,\lambda_i+1=r$

Finalement, on déduit que : $\forall i\in[\![1,r]\!]\ ,u_i(a)=a$

Note : autre méthode : $a=\ u(a)=\frac{\lambda_j+1}{r}u_j(a)\ \Rightarrow N_G(a)=\frac{\lambda_j+1}{r}N_G\left(u_j(a)\right)$ pour tous j

$$\Rightarrow \frac{\lambda_j+1}{r}N_G(a)=N_G(a)\ pour\ tous\ j$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_j+1}{r}=1\ pour\ tous\ j$$

18 - Soit I un ensemble quelconque de $\mathbb{N}$ on considère les endomorphismes u_i appartenant à G qui avec $i\in I$, par hypothèse , tous ces endomorphismes laissent stable K

On considère les ensembles F_i définie par : $F_i=\{x\in K\ tel\ que\ u_i(x)=x\}$ la continuité de u_i assure que chaque F_i est un fermé de K

Supposons que $\bigcap_{i\in I}F_i=\emptyset$ alors d'après la question 10 il existe une sous-famille finie $(F_{i_1},\ldots,F_{i_r})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ tel que $\bigcap_{k=1}^{r}F_{i_k}=\emptyset$

D'autre d'après si on considère la famille finie des endomorphismes $(u_{i_1},\ldots,u_{i_r})$ alors d'après la question 17 tous ces endomorphismes admettent au moins un point fixe commun ce qui veut dire que $\bigcap_{k=1}^{r}F_{i_k}\neq\emptyset$ et ceci est une contradiction alors on déduit que $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$ qu'il existe élément a de K tel que pour tout $u\in G\ ,u(a)=a$

Correction Sujet Maths MP II (Mines-Ponts :2017)

E-Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19-

- Montrons que l'application ρ_A est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$:

$\rho_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$
$M \to \rho_A(M) = A^\top MA$

En effet : $M \in Ker\{\rho_A\} <=> A^\top MA = 0 <=> M = 0$ (car A est inversible) donc ρ_A est injective , alors $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$

- Montrons que H est sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$:

Soient $\rho_A , \rho_B \in H$:

D'abord : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\rho_{A^{-1}}\rho_A(M) = M = {\rho_A}^{-1}\rho_A(M)$

Alors on déduit que : $\forall A \in G$, ${\rho_A}^{-1} = \rho_{A^{-1}}$ de plus ${\rho_A}^{-1} \in G$ car $A^{-1} \in G$ (G est un sous groupe)

Puis :

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}) , {\rho_A}^{-1}\rho_B(M) = {\rho_A}^{-1}(B^\top MB) = \left(A^\top (B^\top MB)A\right)^{-1} = {\rho_{BA}}^{-1}(M) = \rho_{(BA)^{-1}}(M)$

Alors ${\rho_A}^{-1}\rho_B = \rho_{(BA)^{-1}} \in H$ (car $(BA)^{-1} \in G$ du fait que G est un sous groupe)

Ce qui prouve que H est sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$

- Montrons que H est compact :
- H est fermé :

Soit $(\rho_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$une suite d'éléments de H qui converge vers un élément B alors

Comme pour tous $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in G$ et G est compact alors on peut extraire une sous suite $(A_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément A appartenant à , de même la suite $\left({A_{\varphi(n)}}^\top\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\top$

D'autre part la suite $\left(\rho_{A_{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B

Puis : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N} , \rho_{A_{\varphi(n)}}(M) = {A_{\varphi(n)}}^\top MA_{\varphi(n)}$

Et par passage à la limite et du fait que l'application qui A appartenant à G associé $\rho_A(M)$ soit continue pour tous $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors on déduit que :$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), , B(M) = A^\top MA$ ce qui implique que $B \in H$

- H est borné :

Soit ρ_A un élément de H on pose $\|\rho_A\| = Sup_{M\in M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}}\frac{\|\rho_A(M)\|}{\|M\|}$

Puis comme G est compact (en particulier borné) alors $\exists k \geq 0 , \forall B \in G , \|B\| \leq k$

Alors : $\|A\| \leq k$

Puis : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\} , \rho_A(M) = A^\top MA$ qui implique

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\} , \|\rho_A(M)\| = \|A^\top MA\| \leq \|A\|^2 \|M\|$ car ($\|A^\top\| = \|A\|$)

On déduit : $\|\rho_A\| \leq k^2$ alors on a montré que $\forall A \in G , \|\rho_A\| \leq k^2$ ce qui prouve que H est borné

On conclut que H est compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$

20-

- D'abord en utilisant la question 2 : $\forall A \in G , A^\top A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$

- Pour montrer que K est compact on va montrer que Δ est compact et en utilisant le résultat de la question 4 on déduit que $Conv(\Delta) = K$ est compact :

On considère l'application h définie par :

$h : GL_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R}$
$A \to A^\top A$

Il est claire que l'application est h est linéaire, donc elle est continue (on est en dimension finie)

Puis comme G est compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors $h(G) = \Delta$ est compact

Finalement en utilisant le résultat de la question 4 on déduit que $Conv(\Delta) = K$ est compact

- Montrons que K est stable par tous les éléments de H :

Soit $B \in K$ et $\rho_A \in H$ alors

$B \in K => \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} , (B_1, \dots, B_n) \in \Delta^{n+1}$ tel que $B = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i B_i$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

Puis $\forall B_i \in \Delta, \exists C_i \in G$ tel que $B_i = {C_i}^\top C_i$ avec $i \in [\![1, n+1]\!]$

Alors :

$\rho_A(B) = \rho_A(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i B_i) = A^\top \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i {C_i}^\top C_i\right)A = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (C_iA)^\top (C_iA)$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

Correction Sujet Maths MP II (Mines-Ponts :2017)

Et comme G *est un sous-groupe alors* $\forall\, i \in [\![1, n+1]\!]$, $C_i A \in G$ *ce qui implique que* $\forall\, i \in [\![1, n+1]\!]$ $(C_i A)^\top (C_i A) \in \Delta$

On conclut que $\rho_A(B) \in Conv(\Delta) = K$

Finalement on a montré que K est stable par tous les éléments de H

21-

D'après les questions précédentes on déduit que :

$Conv(\Delta) = K$ *est un sous-ensemble non vide , compact et convexe*

Et comme $Conv(\Delta) = K$ *stable par tous les* ρ_A *éléments de H (avec* $A \in G$*)*

Alors ces conditions sont similaires aux données de la question 18 , donc cela veut dire que tous les éléments de H admettent un point fixe appartenant à $Conv(\Delta) = K$

Alors on déduit que : $\exists M \in K, \forall\, A \in G, \rho_A(M) = M$

22-

On considère M_{δ_p} *la matrice associée à* δ_p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *, alors d'après la définition de* δ_p *:* $M_{\delta_p} \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ *et* $\delta_p(P) = P$

Puis comme $O_n(\mathbb{R}) \subset K$ *alors* $M_{\delta_p} \in K$ *donc* $NM_{\delta_p}N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ *ce qui veut dire que* $go\delta_p og^{-1}$ *est un endomorphisme orthogonale*

D'autre part :

$$NM_{\delta_p}N^{-1} \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \left(NM_{\delta_p}N^{-1}\right)^\top = \left(NM_{\delta_p}N^{-1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \left(NM_{\delta_p}N^{-1}\right)^\top = NM_{\delta_p}{}^{-1}N^{-1}$$

$$\Rightarrow \left(NM_{\delta_p}N^{-1}\right)^\top = NM_{\delta_p}N^{-1} \text{ (car } M_{\delta_p}{}^{-1} = M_{\delta_p}{}^\top = M_{\delta_p})$$

Donc $go\delta_p og^{-1}$ *est une symétrie*

(Note : on peut montrer d'abord que $go\delta_p og^{-1}$ *est une symétrie :* $\left(go\delta_p og^{-1}\right)^2 = Id$*)*

- *Montrons que* $go\delta_P og^{-1} = \delta_{g(P)}$

Soit $\subset \mathbb{R}^n$ *, tel que* $g(P) = H$ *et on note que* H *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^n$

Comme g est inversible, alors : $g^{-1}(H) = P$

Donc : $go\delta_P og^{-1}(H) = g(P) = H$ *donc la symétrie orthogonale ne peut être que par rapport à* $g(P)$ *car si non (s'il existe un* $x \notin H$ *tel que* $go\delta_P og^{-1}(x) = x$ *alors* $g^{-1}(x) \in P$ *est ceci est une contradiction)*

- *Montrons que* g *conserve l'orthogonalité*

g *conserve l'orthogonalité ça veut dire que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle g(x), g(y)\rangle = 0$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle = 0$

Posons $P = y^\perp$ *alors* P *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\in P$ *, on considère* δ_p *la symétrie orthogonale par rapport à* P *alors* $go\delta_P og^{-1} = \delta_{g(P)}$ *ce qui implique* $go\delta_P = \delta_{g(P)}og$

Donc : $g(\delta_P(y)) = \delta_{g(P)}(g(y))$ *et comme* $\delta_P(y) = -y$ *alors* $\delta_{g(P)}\big(g(y)\big) = -g(y)$ *ce qui implique que* $g(y) \in g(P)^\perp$ *et comme* $g(x) \in g(p)$ *alors on déduit que* $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$

- *Déterminons K*

D'après la question 5 on déduit : $\exists\, k \geq 0$ *et* $u \in O(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $g = k\,u$

Posons U la matrice orthogonale associée à u , puis en utilisant la question 21 on déduit qu'il existe un sous-groupe G de $O_n(\mathbb{R})$ *tel que* $K = U^{-1}GU$ *et comme .* $U^{-1}G_1U \subset O_n(\mathbb{R})$ *alors on déduit que* $K \subset O_n(\mathbb{R})$ *, d'autre part* $O_n(\mathbb{R}) \subset K$ *alors finalement on déduit que* $K = O_n(\mathbb{R})$ *(c-à-d* $O_n(\mathbb{R})$ *sous-groupe compact maximal de* $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$*)*