Corrigé du Sujet Mathématiques (X) MP 2006 –Epreuve 2

Première Partie

1-

En plus, $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \underbrace{\frac{A+\,^tA}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{A-\,^tA}{2}}_{\in A_n(\mathbb{R})}$

Puis , il est facile de montrer que : $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

2-

A_a *est antisymetrqie , cela veut dire que* $\forall x\,, y\ \in \mathbb{R}^n\ (A_a x|y) = -(x|A_a y)$

Alors , on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(A_a x|x) = 0$

Maintenant, ceci veut dire A est s-positive si est seulement si A_s *est s-positive (car* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax|x) = (A_s x|x)$)

Alors , trouvons la condition nécessaire est suffisante portant sur les valeurs propres de A_s *afin que* A_s *soit s-positive.*

Si A_s *soit s-positive :*

On considère λ *une valeur propre (non nulle)de* A_s *et y son vecteur propre associé , alors dans ce as* $(A_s y|y) = \lambda\|y\|^2 \geq 0$

Donc λ *est positive*

Inversement, supposons que l'ensemble des valeurs propres de A_s *sont positives*

Comme A_s *est diagonalisable (Matrice symétrique réelle) , alors on considère* $B(y_1, \dots, y_n)$*une base* $\mathbb{R}^n$ *constituée des vecteurs propres de* A_s *avec*y_i*associé à une valeur propre*$\lambda_{\,i}$

Dons ce cas : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}\ \ tel\ que\ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y_i$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(A_s x|x) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i\, A_s y_i | \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\,i}\, {\alpha_i}^2 \|y_i\|^2$

Ce qui montre que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(A_s x|x) \geq 0$

Finalement on a montré que : A est s-positive si est seulement si l'ensemble des valeurs propres de A_s *sont positives*

Deuxième Partie

3-

Supposons que la matrice $\lambda I + A$ *n'est pas inversible, alors dans ce cas* $\det(\lambda I + A) = 0$*, ce qu i veut dire que –* λ *est une valeur propre de A*

Alors : $\exists x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $Ax = -\lambda x$

Puis :

$Ax = -\lambda x \Rightarrow (Ax|x) = -\lambda\,\|x\|^2$

$\qquad\qquad \Rightarrow (Ax|x) < 0$

Et ceci est une contradiction avec le fait que A est s-positive.

Finalement : la matrice $\lambda I + A$ *est inversible*

4-a

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ker A :

Soit $x = (x_1, x_2)$ *un vecteur* $\mathbb{R}^2$*alors :*

$x \in Ker\ A\ \Leftrightarrow Ax = 0$

$\qquad\qquad \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

Donc : $KerA = \{0\}$

Im A :

D'après le théorème du rang, on sait que : $dim\mathbb{R}^2 = dimKerA + dimImA$

Donc : $dimImA = dim\mathbb{R}^2$

Ce qui veut dire que : $ImA = \mathbb{R}^2$

$R_\lambda(A)$:

$R_\lambda(A) = (\lambda I_2 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Puis : $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda(A) = A$ *et* $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = 0$

4-b

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ker A :

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ *un vecteur* $\mathbb{R}^3$ *alors :*

$x \in Ker\ A \iff Ax = 0$

$\iff x_1 = x_3 = 0$

Donc : $KerA = Vect(0,1,0)$

Im A : $ImA = Vect\{(1,0,0)(0,0,1)\}$

$R_\lambda(A)$:

$R_\lambda(A) = (I_3 + \lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} & 0 & -\frac{1}{1+\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ \frac{1}{1+\lambda^2} & 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \end{pmatrix}$

Puis : et $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5-a

On a : $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$

Alors : $\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)\left(R_\lambda(A)\right)^{-1} = \lambda I + A - \lambda I = A$ *et* $\left(R_\lambda(A)\right)^{-1}\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right) = \lambda I + A - \lambda I = A$

Donc, on déduit que : $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A)$

5-b

Soit $\mu > 0$ *alors :* $AR_\mu(A) = R_\mu(A)A = I - \mu R_\lambda(A)$

Puis :

$I - \lambda R_\lambda(A) = R_\lambda(A)A \Rightarrow \left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)R_\mu(A) = R_\lambda(A)AR_\mu(A)$

$\Rightarrow \left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)R_\mu(A) = R_\lambda(A)(I - \mu R_\lambda(A))$

$\Rightarrow R_\lambda(A) - R_u(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$

Finalement on a montré que : $R_\lambda(A) - R_u(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$

6

Soit $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

Comme A est s-positive alors : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $(AR_\lambda(A)x|R_\lambda(A)x) \geq 0$

Puis , d'autre part : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $(AR_\lambda(A)x|R_\lambda(A)x) = (R_\lambda(A)x|x) - \lambda\|R_\lambda(A)x\|^2$

Alors on déduit que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $(R_\lambda(A)x|x) \geq \lambda\|R_\lambda(A)x\|^2$

Après on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\lambda\|R_\lambda(A)x\|^2 \leq (R_\lambda(A)x|x) \leq \|R_\lambda(A)x\|\|x\|$ *et on note que* $\|R_\lambda(A)x\| \neq 0$

Finalement on conclut que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\frac{\|R_\lambda(A)x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\lambda}$

Ce qui veut dire que : $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$

Etude de cas d'égalité :

Prouvons($<=$), *Pour ça supposons que :* $detA = 0$

Alors , en utilisant la question 5-a on déduit que : $detA \times \det R_\lambda(A) = det\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right) = 0$
Ce qui veut dire que $\frac{1}{\lambda}$ *est une valeur propre de* $R_\lambda(A)$, *alors il existe un vecteur propre x de* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\frac{\|R_\lambda(A)x\|}{\|x\|} = \frac{1}{\lambda}$
Alors dans ce cas : $\|R_\lambda(A)\| = \frac{1}{\lambda}$

Prouvons ($=>$) *:*

D'abord on peut remarquer : $\|R_\lambda(A)\| = sup\left\{\frac{\|R_\lambda(A)x\|}{\|x\|} \quad , x \neq 0\right\} = sup\{\|R_\lambda(A)x\| \quad tel\ que \quad \|x\| = 1\}$
L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n \quad tel\ que\ \|x\| = 1\ \}$, *est un compact de* $\mathbb{R}^n$ *(car fermé et borné)*
Alors , on considère l'application : $T: \quad S \to \mathbb{R}^+$
$\qquad x \to \|R_\lambda(A)x\|$
L'application T est continue sur le compact S (car T est $\frac{1}{\lambda}$*-Lipsctozienne), donc T elle atteint sa borne supérieure.*
Alors, on déduit que : : $\exists y \in S$, $\|R_\lambda(A)\| = \|R_\lambda(A)y\| = \frac{1}{\lambda}$
Puis, on a vu en question 5-c que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\lambda\|R_\lambda(A)x\|^2 \ \leq (R_\lambda(A)x|x) \ \leq \|R_\lambda(A)x\|\|x\|$

Donc : $\frac{1}{\lambda} \leq (R_\lambda(A)y|y) \leq \frac{1}{\lambda}$ *ce qui veut dire* $(R_\lambda(A)y|y) = \frac{1}{\lambda} = \|R_\lambda(A)y\|\|y\|$
Et on sait en cas d'égalité de la relation de Cauchy-Schwarz les deux vecteurs $R_\lambda(A)y$ *et y doivent être linéaires.*
Ce qui veut que : $\exists\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $R_\lambda(A)y = \alpha y$
Puis comme $\|R_\lambda(A)y\| = \frac{1}{\lambda}$ *et* $\|y\| = 1$ *on déduit que* $\alpha = \frac{1}{\lambda}$
On conclut que $\frac{1}{\lambda}$ *est une valeur propre de* $R_\lambda(A)$
D'autre part, comme $detA \times \det R_\lambda(A) = det\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)$
Alors on déduit que $detA \times \det R_\lambda(A) = 0$
Et comme $\det R_\lambda(A) \neq 0$ *car* $R_\lambda(A)$ *est un inversible*
Finalement on conclut que : $detA = 0$

7-a
Soit $x \in ImA$ *alors* $\exists y \in \mathbb{R}^n$, $Ay = x$
Puis : $\|\lambda R_\lambda(A)x\| = \|\lambda R_\lambda(A)Ay\| = \left\|\lambda\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)y\right\| = \lambda\left\|\left(I - \lambda R_\lambda(A)\right)y\right\|$
Alors : $\|\lambda R_\lambda(A)x\| \leq \lambda(1 + \lambda\|R_\lambda(A)\|)\|y\|$
Donc on déduit que : $\|\lambda R_\lambda(A)x\| \leq 2\lambda\|y\|$
Et par passage à le limite , on déduit que $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ *lorsque* $\lambda \to 0$

7.b

On sait que d'après le théorème du rang en dimension finie que : $dim\mathbb{R}^n = dimc + dimImA$
Il suffit de montrer que $KerA$ *et* ImA *sont en somme directe :*
Soit $x \in KerA \cap ImA$
D'après la question précédente $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ *lorsque* $\lambda \to 0$
Alors : $\forall n \in IN^*$, $\exists\alpha > 0$, $tel\ que\ \ 0 < \lambda \leq \alpha$, $\|\lambda R_\lambda(A)x\| \leq \frac{1}{n}$
D'autre part : $\|\lambda R_\lambda(A)x\| = \|(I - R_\lambda(A)A)x\| = \|x\|$ *car* $Ax = 0$
Donc on déduit que : : $\forall n \in IN^*$, $\|x\| \leq \frac{1}{n}$
Et par passage à la limite on déduit que $x = 0$
Finalement , on montré que $KerA \cap ImA = \{0\}$
Et on conclut que : $\mathbb{R}^n = KerA \oplus ImA$

7.c
On considéré p le projecteur sur $KerA$ *en parallèle à* ImA
Soit $x \in \mathbb{R}^n$,*montrons que* $\|\lambda R_\lambda(A)x - Px\| \to 0$ *lorsque e* $\lambda \to 0$ *avec P est la matrice représentant le projeteur p dans* $M_n(\mathbb{R})$
Comme $\mathbb{R}^n = KerA \oplus ImA$ *et* $\begin{cases} KerP = ImgA \\ ImP = KerA \end{cases}$
D'autre part $x = x' + x''$ *avec* $x' \in KerA$ *et* $x'' \in ImgA$
Alors p(x)= x'

Puis :
$\|\lambda R_\lambda(A)x - Px\| = \|\lambda R_\lambda(A)x - Px\| = \|\lambda R_\lambda(A)x'' + x' - x'\| = \|\lambda R_\lambda(A)x''\|$
Et comme $x'' \in ImgA$ alors d'après la question précédente $\lambda R_\lambda(A)x'' \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$
Finalement on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda R_\lambda(A)x - Px \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$
Alors on conclut que : $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur $KerA$ en parallèlement à $ImgA$

8-
Soit n entier naturel non nul
Montrons par récurrence la proposition suivante : $P(n): \Phi$ *est n fois derivable et* $\Phi^{(n)} = (-1)^n n!\,\Phi^{n+1}$ avec $\Phi^{n+1} = \underbrace{\Phi \times \ldots \times \Phi}_{n+1\ fois}$

D'abord on note que Φ est continue sur $]0, +\infty[$ (Produit de deux fonctions continues)
Montons P(1) :
Soit $\mu > 0$ alors d'après la question 5-b :

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(\mu)}{t - \mu} = -\Phi(t)\Phi(\mu)$$
Alors par passage à la limite et en utilisant la continuité de la fonction Φ on déduit que :
$$\lim_{t \to \mu} \frac{\Phi(t) - \Phi(\mu)}{t - \mu} = -\Phi(\mu)^2$$
Donc , Φ est dérivable « une fois » sur $]0, +\infty[$ et $\forall t > 0$, $\Phi^{(1)}(t) = -\Phi(t)^2$, alors P(1) est vraie.

Supposant que P(n) et vraie et montrons P(n+1)

Soit $\mu > 0$ alors :
$$\frac{\Phi^{(n)}(t) - \Phi^{(n)}(\mu)}{t - \mu} = (-1)^n n! \frac{\Phi(t)^{n+1} - \Phi(\mu)^{n+1}}{t - \mu} = (-1)^n n! \left(\frac{\Phi(t) - \Phi(\mu)}{t - \mu}\right) \sum_{k=0}^{n} \Phi(t)^k \Phi(\mu)^{n-k}$$
Puis par passage à la limite en utilisant la continuité des fonctions $\Phi(t)^k$ on déduit que :
$$\lim_{t \to \mu} \frac{\Phi^{(n)}(t) - \Phi^{(n)}(\mu)}{t - \mu} = (-1)^{n+1} n!\, \Phi(\mu)^2 \Phi(\mu)^2 \times (n+1)\Phi(\mu)^n = (-1)^{n+1}(n+1)!\, \Phi(\mu)^{n+2}$$
Alors on a montré que Φ est (n+1) dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall t > 0$, $\Phi^{(n+1)}(t) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, \Phi(t)^{n+2}$
Donc P(n+1) est vraie

9-
En utilisant la propriété (ii) , on déduit que :
$\forall \lambda > 0$, $F(\lambda)\big(I - (1 - \lambda)F(1)\big) = F(1)$
Et comme $F(1)$ est inversible alors $det(F(\lambda)) \neq 0$, ce qui veut dire que $F(\lambda)$ est inversible

10-a

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu) => F(\lambda)F(\mu)^{-1} - I = (\mu - \lambda)F(\lambda)$$
$$=> F(\lambda)^{-1} - F(\lambda)^{-1} = (\mu - \lambda)I$$
Finalement, on montré que : $\forall\ \lambda , \mu > 0$, $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)I$

10-b

D'après la question précédente : $\forall\ \lambda , \mu > 0$, $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)I$
En fixe $\mu = 1$ ici faisant tendre $\lambda \to 0$ alors on déduit que $\lim_{\lambda \to 0} F(\lambda)^{-1} = F(1)^{-1} - I$
Alors $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A lorsque $\lambda \to 0$
Apres on reprend cette fois ci l'expression : $\forall\ \lambda , \mu > 0$, $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)I$
On fait tendre $\mu \to 0$ alors on déduit que : $\forall\ \lambda > 0, F(\lambda)^{-1} = A + \lambda I$

11-
Montrons que $AF(\lambda)$ est s-positive :

D'abord en utilisant la question précédente on déduit que : $AF(\lambda) = I - \lambda F(\lambda)$
Puis : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $(AF(\lambda)x|x) = \|x\|^2 - \lambda(F(\lambda)x|x)$
D'autre , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $(F(\lambda)x|x) \leq \|F(\lambda)x\|\|x\| \leq \|F(\lambda)\|\|x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|^2$
Finalement on conclut que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $(AF(\lambda)x|x) \geq 0$

Montrons que A est s-positive :

D'abord, comme $\forall\lambda > 0$, $\|F(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$

D'autre part : $AF(\lambda) = I - \lambda F(\lambda)$et par passage à la limite , on déduit que :$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda F(\lambda) = I$

Puis, comme $AF(\lambda)$ est s-positive, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\big(A(\lambda F(\lambda))x\big|x\big) \geq 0$

Finalement par passage à la limite (en faisant tendre λ vers $+\infty$) , on conclut que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax|x) \geq 0$, ce qui prouve que A est s-positive

Quatrième Partie

12-

Montrons que : $(i \Rightarrow ii)$

Soit v et μ deux réels positifs $v \leq \mu$ tel que et on pose $T: t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$ avec $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $T(u) - T(v) = (\|\exp(-\mu A)\,x\| - \|\exp(-vA)\,x\|)(\|\exp(-vA)\,x\| + \|\exp(-\mu A)\,x\|)$

Puis : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $T(u) - T(v) = (\|\exp(-(\mu - v)A)\exp(-vA)\,x\| - \|\exp(-vA)\,x\|)(\|\exp(-vA)\,x\| + \|\exp(-\mu A)\,x\|)$

Puis comme : $\forall t \geq 0, \|\exp(-tA)\| \leq 1$ alors cela veut dire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\|exp(-tA)x\| \leq \|x\|$

D'autre part comme $\mu - v \geq 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\exp(-vA)\,x \in \mathbb{R}^n$, alors on déduit que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\|\exp(-(\mu - v)A)\exp(-vA)\,x\| \leq \|\exp(-vA)\,x\|$

Ce qui implique finalement : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $T(v) \geq T(u)$

Alors $T: t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$ est une fonction décroissante

Montrons que : $(ii \Rightarrow i)$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, q: $t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$ sur $\mathbb{R}^+$

Alors : $t \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(t) \leq q(0)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|\exp(-tA)\,x\|^2 \leq \|x\|^2$

On déduit que : $t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\frac{\|\exp(-tA)x\|}{\|x\|} \leq 1$

Finalement, on conclut que : $t \geq 0$, $\|\exp(-tA)\| \leq 1$

Montrons que : $(ii \Rightarrow iii)$

Montrons d'abord qu'il existe un V_0 (voisinage de 0)dans $\mathbb{R}^+$ tel que :$\forall t \in V_0$, $exp(-tA) = I_n - tA + o(tA)$

Comme :

$$\frac{\|exp(-tA) - I_n + tA\|}{\|tA\|} = \left\|\frac{1}{\|A\|}\left(\frac{exp(-tA) - I_n}{t}\right) + \frac{A}{\|A\|}\right\|$$

D'autre part : $\forall t \geq 0$, $\frac{d}{dt}exp(-tA) = -A\,exp(-tA)$

Cela implique que : $\lim_{t\to 0}\frac{exp(-tA)-I_n}{t} = -A$

Et en utilisant le fait que l'application $t \to \left\|\frac{1}{\|A\|}\left(\frac{exp(-tA)-I_n}{t}\right) + \frac{A}{\|A\|}\right\|$ sur $\mathbb{R}^+$ alors par passage à la limite on déduit que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|exp(-tA) - I_n + tA\|}{\|tA\|} = 0$$

Ce qui veut dire que qu'il existe un V_0 (voisinage de 0)dans $\mathbb{R}^+$ tel que :$\forall t \in V_0$, $exp(-tA) = I_n - tA + o(tA)$

Maintenant comme la fonction $t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^n$

Alors : $\forall t \in V_0$, $\|(I_n - tA + o(tA))x\|^2 \leq \|x\|^2$

D'autre part :

$$\forall t \in V_0 ,\ \big\|\big(I_n - tA + o(tA)\big)x\big\|^2 = \Big(\big(I_n - tA + o(tA)\big)x\Big|\big(I_n - tA + o(tA)\big)x\Big) = \|x\|^2 - 2(tAx|x) + \big(o(tA)\big|2x - 2tAx + o(tA)\big) + \|tAx\|^2$$

Alors :

$\forall t \in V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $2(tAx|x) \geq \|tAx\|^2 - (o(tA)x|2x - 2tAx + o(tA)x)$

Ce qui implique que : $\forall t \in V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $2(Ax|x) \geq t\|Ax\|^2 - \left(\frac{o(tA)}{t}x\middle|2x - tAx + o(tA)\right)$

Puis comme :

$$\lim_{t\to 0}\frac{o(tA)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{exp(-tA) - I_n}{t} + A = 0$$

Alors par passage à la limite (en faisant tendre t vers 0) ,on déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax|x) \geq 0$

Finalement, on a montré que A est s-positive

Montrons que : $(iii => ii)$
Soit $x \in \mathbb{R}^n$
On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $q : t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$
D'abord $\forall t \geq 0$, $q(t) = (\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x)$
Puis montrons que q *est dérivable et que :* $\forall t \geq 0$, $q'(t) = -2(A\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x)$

Soit $h > 0$ *alors :*
$q(t+h) - q(h) = (\exp(-(t+h)A)\,x|\,\exp(-(t+h)A)\,x) - (\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x)$
Puis :
$q(t+h) - q(h) = (\exp(-(t+h)A)\,x|\,\exp(-tA)\,x) - (\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x) + (\exp(-(t+h)A)\,x|(\exp(-(t+h)A) - \exp(-tA))x)$
Alors déduit que :
$$\frac{q(t+h)-q(h)}{h} = \left(\frac{\exp(-(t+h)A) - \exp(-tA)}{h}x\middle|\,\exp(-tA)\,x\right) + \left(\frac{\exp(-(t+h)A) - \exp(-tA)}{h}x\middle|\,\exp(-(t+h)A)\,x\right)$$

Et comme :
$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{exp(-(t+h)A) - exp(-tA)}{h} = \dfrac{d}{dt}exp(-tA) = -Aexp(-tA) \\ \lim\limits_{h\to 0} exp(-(t+h)A) = exp(-tA) \end{cases}$$

D'autre part l'application bilinéaire associé au produire scalaire $(.\,|.\,)$ *est continue (la continuité est assurée par la fait que l'application est sur une dimension finie)*
Donc , par passage à la limite , on déduit que
$$\lim_{h\to 0}\frac{q(t+h)-q(h)}{h} = -\,2(A\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x)$$
Ce qui implique que q *est dérivable et que :* $\forall t \geq 0$, $q'(t) = -2(A\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x)$
Puis , comme A est s-positive alors : : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \geq 0$, $(A\exp(-tA)\,x|\,\exp(-tA)\,x) \geq 0$
Donc, on déduit que : $\forall t \geq 0$, $q'(t) \leq 0$
Finalement, on a montré que la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $t \to \|\exp(-tA)\,x\|^2$ *est décroissante*

13-
Soit $t \geq 0$
D'abord on note que si on pose $\exp(-tA) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *alors* $(\exp(-tA))_{i,j} = a_{ij}$
Maintenance on considère sur $M_n(\mathbb{R})$ *la norme* $\|.\|_\infty$ *tel que* $\|\exp(-tA)\|_\infty = max_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$
Alors : $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $|\,(\exp(-tA))_{i,j}| \leq \|\exp(-tA)\|_\infty$
D'autre part, en dimension finie toutes les nomes sont équivalent, ce qui implique que : $\exists\beta > 0$, $\|\exp(-tA)\|_\infty \leq \beta\|\exp(-tA)\|$
Puis, en utilisant la question précédente on déduite que : $\forall t \geq 0$, $\|\exp(-tA)\|_\infty \leq \beta$
D'autre part : $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \geq 0$, $|e^{-\lambda t}\,(\exp(-tA))_{i,j}| \leq e^{-\lambda t}\|\exp(-tA)\|_\infty$
Alors : : $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \geq 0$, $|e^{-\lambda t}\,(\exp(-tA))_{i,j}| \leq \beta e^{-\lambda t}$
Et comme la fonction : $t \to \beta e^{-\lambda t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$
D'où la convergence de l'intégrale $\rho(\lambda)_{i,j}$

14-
Par définition : $\rho(\lambda) = (\rho(\lambda)_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\exp(-tA)\,dt$
Par une intégration par paries et utilisant le fait que : $\begin{cases} \frac{d}{dt}exp(-tA) = -A\,exp(-tA) \\ \|\exp(-tA)\| \leq 1 \end{cases}$
On déduit que : $\rho(\lambda) = \frac{1}{\lambda}I_n - \frac{1}{\lambda}A\,\rho(\lambda)$
Ce qui implique que : $\rho(\lambda)(\lambda I_n + A) = I_n$
Finalement, on déduit que : $\rho(\lambda) = R_\lambda(A)$

15-

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 1 :

D'après le théorème de Cayley-Hamilton le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(A - XI) = X^2 + 1$ *est un polynôme annulateur de A.*

Alors : $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, A^{2k} = (-1)^k I \\ \forall k \in \mathbb{N}, A^{2k+1} = (-1)^k A \end{cases}$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \exp(-tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} I - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} A$$

Et comme : $\begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = cos(t) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = sin(t) \end{cases}$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \exp(-tA) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sint(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Puis

$$\rho(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \exp(-tA)\, dt = \left(\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t} \right)(I + A) - \frac{1}{1+\lambda} A = \left(\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-\lambda t} dt \right)(I + A) - \frac{1}{1+\lambda} A$$

Et comme :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-\lambda t} dt = Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - i)t}\, dt \right) = Re\left(\frac{1}{\lambda - i} \right) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

Alors , finalement on déduit que :

$$\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} I - \frac{I}{\lambda^2 + 1} A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} & \frac{-1}{1+\lambda^2} \\ \frac{1}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \end{pmatrix}$$

On retrouve bien l'expression de $R_\lambda(A)$ *de la question 4*

Méthode 2

On considère l'ensemble : $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ } avce\ a\ , b \in \mathbb{R} \right\}$

On l'application : $\varphi :\ \mathbb{C} \to S$

$$a + ib \to\ \varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Il est facile de montrer que φ *est un homéomorphisme d'algèbre*

Donc , $\forall z\ \in \mathbb{C}\ , \varphi(exp(z)) = exp(\varphi(z))$

Alors : $\varphi(exp(it)) = exp(-tA)$ *ce qui veut dire que :* $exp(-tA) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sint(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$

Puis ;

$$\rho(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, exp(-tA)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \varphi(exp(it)) dt = \varphi\left(\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - i)t}\, dt \right) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda - i} \right) = \varphi\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + i \frac{1}{1+\lambda^2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} & \frac{-1}{1+\lambda^2} \\ \frac{1}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \end{pmatrix}$$