A-Produit scalaire de matrices

1-

D'abord on considère $B_c(b_1, b_2, \dots, b_n)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$alors il est claire que : $\forall i \in [\![1,n]\!], \langle Mb_i, b_i\rangle = a_{ii}$

Donc : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$,$Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} \langle Mb_i, b_i\rangle$ (*)

Maintenant on considère $B(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^n$ et on pose E_i et B_i les vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associés à chaque vecteur e_i et à chaque vecteur b_i

On considère $P = Mat_{B_c}(B) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base B_c vers la base B , on sait que dans de ce cas : $P \in O_n(\mathbb{R})$

Alors : $\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} {}^t(A E_i)E_i = \sum_{i=1}^{n} {}^t(A PB_i)PE_i = \sum_{i=1}^{n} {}^tB_i\,({}^tPAP)B_i$

Puis en utilisant le résultat (*) on déduit que : $\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i\rangle = Tr({}^tPAP) = Tr(A)$ car ${}^tPP = I_n$

2-

Montons que l'application $\langle , \rangle : (A,B) \to tr({}^tAB)$ définit un produit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) : \langle A,B\rangle = tr({}^tAB) = tr({}^t({}^tAB)) = tr({}^tBA) = \langle B,A\rangle$ alors $\langle , \rangle$ symétrique
- $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\langle aA + bC, B\rangle = atr({}^tAB) + btr({}^tCB) = a\langle A,B\rangle + b\langle C,B\rangle$ donc $\langle , \rangle$ est linéaire par rapport au premier variable et comme elle est symétrique alors elle est bilinéaire
- On considère la base $B_c(b_1, b_2, \dots, b_n)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$ et B_i le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associé au vecteur b_i
  - ✓ $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$,$\langle A,A\rangle = tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^tAAb_i, b_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} {}^t(AB_i)(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} \|AB_i\|^2 \ge 0$ alors $\langle , \rangle$ est positive
  - ✓ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle A,A\rangle = 0$ alors dans ce cas $\sum_{i=1}^{n} \|AB_i\|^2 = 0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!], AB_i = 0$ donc $A = 0$

3- On considère la base $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ orthonormée constituée des vecteurs propres associés à chaque valeur propres λ_i de la matrice B (l'existence de cette base est assurée du fait que B est symétrique à valeurs réelles) et on note $Sp(B) = \{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ l'ensemble des valeurs propres de B , puis par définition : $Sp(B) \subset \mathbb{R}^+$

Alors en utilisant la question 1 on déduit que : $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^tABv_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle Av_i, v_i\rangle$

On considère : $\lambda_m = minSp(B)$ alors $\langle A,B\rangle \ge \lambda_m \sum_{i=1}^{n} \langle Av_i, v_i\rangle = \lambda_m tr(A)$

Et comme la matrice A est symtrique réelle positive alors $tr(A) \ge 0$

Finalement on déduit que $\langle A,B\rangle \ge \lambda_m tr(A) \ge 0$

B-Décomposition polaire

4-

Il est évident que la matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X son vecteur associé alors : ${}^tAAX = \lambda X$

Puis : ${}^tAAX = \lambda X \Rightarrow {}^t(AX)(AX) = \lambda({}^tXX)$

$\Rightarrow \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$

$\Rightarrow \lambda \ge 0$

Alors on a montré que toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont positives ce qui conclut que ${}^tAA$ est symétrique réelle positive

On considère $Sp({}^tAA) = \{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ l'ensemble des valeurs propres de ${}^tAA$ et $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de ${}^tAA$ avec chaque V_i est associé à λ_i puis on pose : $\lambda_M = Max\,Sp({}^tAA)$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ et $\|X\| = 1$

Dans ce cas : $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \le \lambda_M$ donc $\|A\|_2 \le \sqrt{\lambda_M}$

Puis si on considère V_M le vecteur propre associé au λ_M alors dans cas $\|AV_M\| = \sqrt{\lambda_M}$ ce que veut dire que la borne supérieure de la norme de $\|A\|_2$ est atteinte alors on conclut : $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_M}$

5-

Comme A est la matrice associée à f dans une base orthonormée alors ${}^tA$ est la matrice associée à f^* dans la même base

Alors on déduit ${}^tAA$ est une matrice associée à l'endomorphisme f^*of donc d'après la question 4 elle est symétrique réelle positive , ce qui implique que ${}^tAA$ est diagonalisable

Alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA = P\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\,{}^tP$ avec $Sp({}^tAA) = \{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\} \subset \mathbb{R}^+$

On pose : $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \in M_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA = ({}^tP\Delta P)({}^tP\Delta P)$

On considère $H = {}^tP\Delta P$ et h l'endomorphisme associé à H donc il est claire que dans ce cas h est un endomorphisme symétrique (auto-adjoint) positif tel que : $f^*of = h^2$

6- $\tilde{h}: Imh \rightarrow Imh$

$x \rightarrow \tilde{h}(x) = h(x)$

Il est claire que $\tilde{h}$ *est un endomorphisme, montrons qu'elle est surjective*

D'abord : $E = Imh \oplus (Imh)^{\perp}$

Soit $y \in Imh$ *donc* $\exists\, x \in E\,, h(x) = y$ *, on pose* $x = x_1 + x_2$ *avec* $x_1 \in Imh$ *et* $x_2 \in (Imh)^{\perp}$

Alors $h(x) = h(x_1) + h(x_2)$ *puis comme* $h(x_1) = \tilde{h}(x_1)$ *et* $h(x_2) = 0$

en effet : $x_2 \in (Imh)^{\perp}$ *implique que* $\forall\, v \in Imh\,, \langle x_2, v\rangle = 0$ *puis comme h est surjective de* $E \rightarrow Imh$ *on déduit que :* $\forall x \in E\,, \langle x_2, h(x)\rangle = 0$ *après comme h est auto-adjoint alors* $\forall x \in E\,, \langle h(x_2), x\rangle = 0$ *ce qui veut dire que :* $h(x_2) \in E^{\perp} = \{0\}$

finalement on déduit que :

$\forall y \in Imh\,, \exists x \in Imh \text{ tel que} : \tilde{h}(x) = y$ *ce qui montre que* $\tilde{h}$ *est surjective ce qui conclut qu'elle est un automorphisme de* $Imh \rightarrow Imh$

7-

$\forall x \in E\ ,\ \|h(x)\|^2 = \langle h(x), h(x)\rangle = \langle x, h^2(x)\rangle = \langle x, f^* of(x)\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2$

Alors on déduit que : $\forall x \in E\ , \|h(x)\| = \|f(x)\|$

Puis :

Si $x \in Ker\, h$ *alors* $\|f(x)\| = 0$ *ce qui implique que* $x \in Kerf$ *alors :* $Ker\, h \subset Kerf$

De la même manière on montre que $Ker\, f \subset Kerh$ *, alors on a montré que :* $Ker\, f = Kerh$

Puis comme : $\begin{cases} dimE = dimImf + dim(Imf)^{\perp} \\ dimE = dimImf + \dim Ker\, f \end{cases}$ *alors on déduit que* $\dim Ker\, h = dim(Imf)^{\perp}$

Après :

On considère $B(b_1, b_2, \dots, b_r)$ *et* $C(c_1, c_2, \dots, c_r)$ *les bases orthonormées repectiveent de* $Ker\, h$ *et* $(Imf)^{\perp}$ *avec* $\dim Ker\, h = dim(Imf)^{\perp} = r$

Puis on considère l'application linéaire : $v : Ker\, h \rightarrow (Imf)^{\perp}$ *tel que* $\forall i \in [\![1, r]\!]\,, v(b_i) = c_i$

Alors v *est un isomorphisme (car elle transforme une base vers une base) et de plus , il est facile de vérifier que :* $\forall x \in Kerh\,,\ \|v(x)\| = \|x\|$

Alors on a montré qu'il existe un isomorphisme de $Ker\, h$ *vers* $(Imf)^{\perp}$ *conservant la norme*

8- Comme $\begin{cases} dimE = dimImh + dim(Imh)^{\perp} \\ dimE = dimImh + \dim Ker\, h \end{cases}$ *alors* $\dim(Imh)^{\perp} = \dim Ker\, h$

Alors de la même manière que la question 7 il existe un isomorphisme $w: (Imh)^{\perp} \rightarrow Ker\, h$ *conservant la norme*

Maintenant on considère l'application u *définie par :*

$u:\ E = Imh \oplus (Imh)^{\perp} \rightarrow E$

$x = x_h + x_{h^{\perp}} \quad \rightarrow u(x) = fo\tilde{h}^{-1}(x_h) + vow(x_{h^{\perp}})$

- *Montrons que* u *est linéaire :*

Soient $\begin{cases} x = x_h + x_{h^{\perp}} \in E \\ y = y_h + y_{h^{\perp}} \in E \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

alors $u(\lambda x + y) = \lambda fo\tilde{h}^{-1}(x_h) + \lambda vow(x_{h^{\perp}})\lambda + fo\tilde{h}^{-1}(y_h) + \lambda vow(y_{h^{\perp}}) = \lambda u(x) + u(y)$

- *Montrons que* u *conserve la norme (implicitement ceci montrera que* u *est injective et orthogonal)*

$$\forall\, x = x_h + x_{h^{\perp}} \in E\,, \|u(x)\|^2 = \langle fo\tilde{h}^{-1}(x_h) + vow(x_{h^{\perp}}), fo\tilde{h}^{-1}(x_h) + vow(x_{h^{\perp}})\ \rangle$$

Puis comme $fo\tilde{h}^{-1}(x_h) \in Imf$ *et* $vow(x_{h^{\perp}}) \in (Imf)^{\perp}$

alors : $\forall\, x = x_h + x_{h^{\perp}} \in E\,, \|u(x)\|^2 = \left\| fo\tilde{h}^{-1}(x_h)\right\|^2 + \|vow(x_{h^{\perp}})\ \|^2$

Puis par définition de v *et* w *:* $\|vow(x_{h^{\perp}})\ \|^2 = \|x_{h^{\perp}}\|^2$

Et en utilisant la question 7 : $\left\| fo\tilde{h}^{-1}(x_h)\right\|^2 = \left\| ho\tilde{h}^{-1}(x_h)\right\|^2 = \|\, x_h\|^2$

On déduit que : $\forall\, x = x_h + x_{h^{\perp}} \in E\,, \|u(x)\|^2 = \|\, x_h\|^2 + \|x_{h^{\perp}}\|^2 = \|x_h + x_{h^{\perp}}\|^2 = \|x\|^2$

On conclut que : $\forall x \in E\,, \|u(x)\| = \|x\|$

Finalement on a montré que u *est un automorphisme orthogonal*

- *Montrons que :* $f = uoh$

D'abord $\forall x \in E\,, h(x) \in Imh$ *alors par définition de* u *:* $\forall x \in E : u\big(h(x)\big) = fo\tilde{h}^{-1}\big(h(x)\big) = f(x)$

Ce qui montre que : $f = uoh$

9-

D'après la question précédente si on considère les matrices U,S associées respectivement aux deux endomorphismes u,h alors le résultat s'en découle : $A = US$

C-Projeté sur un convexe compact

10-

- Montrons l'existence de h_0 :

l'application $y \to \|x-y\|$ de $E \to \mathbb{R}^+$ est continue, et comme H est compact de E alors cette application atteint sa borne inferieure sur H donc : $\exists h_0 \in H, d(x,H) = inf_{h\in H}\|x-h\| = \|x-h_0\|$

- Montrons l'unicité de h_0

Soit h_1 tel que , $d(x,H) = \|x-h_0\| = \|x-h_1\|$

Puis comme H est convexe alors : $\forall t \in]0,1[, th_0 + (1-t)h_1 \in H$ alors on considère la fonction $q : t \to \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$ définie sur l'intervalle $]0,1[$

Puis dans ce cas : $\forall t \in]0,1[, q(t) \geq \|x-h_1\|^2$

D'autre part :

$$\forall t \in]0,1[, q(t) = \|t(x-h_0) + (1-t)(x-h_1)\|^2 = (2t^2-2t+1)\|x-h_0\|^2 + 2t(1-t)\langle x-h_0, x-h\rangle$$

Et comme $\langle x-h_0, x-h_1\rangle = \frac{2\|x-h_0\|^2 - \|h_1-h_0\|^2}{2}$

alors : $\forall t \in]0,1[, q(t) = 2t(1-t)\|h_1-h_0\|^2 + \|x-h_1\|^2$

On déduit que : $\forall t \in]0,1[, -2t(1-t)\|h_1-h_0\|^2 \geq 0$ ce qui entraine $\|h_1-h_0\|^2 = 0$

Alors finalement on conclut que : $h_1 = h_0$

11-

Soit $h \in H$, on considère la fonction : $q : t \to \|x - th - (1-t)h_0\|^2$

Alors :

$$\forall t \in]0,1[, q(t) = \|(x-h_0) - t(h-h_0)\|^2 = \|x-h_0\|^2 - 2t\langle x-h_0, h-h_0\rangle + t^2\|h-h_0\|^2 \geq \|x-h_0\|^2$$

Donc : $\forall t \in]0,1[, \langle x-h_0, h-h_0\rangle \leq \frac{t}{2}\|h-h_0\|^2$ et par passage à la limité $(t \to 0)$ on déduit que :$\langle x-h_0, h-h_0\rangle \leq 0$

Réciproquement : Supposant que $\forall h \in H : \langle x-h_0, h-h_0\rangle \leq 0$ (on note que en cas : $x = h_0$ il n'ya rien à démontrer on suppose que $x \neq h_0$)

Comme $\forall h \in H, \langle x-h_0, h-h_0\rangle = \|x-h_0\|^2 - \langle x-h_0, x-h\rangle$ alors $\forall h \in H, \|x-h_0\|^2 \leq \langle x-h_0, x-h\rangle$

Puis en utilisant le théorème de Cauchy-Schwartz : $\forall h \in H, \langle x-h_0, x-h\rangle \leq \|x-h_0\|\|x-h\|$

Ce qui conclut que : $\forall\, h \in H, \|x-h_0\| \leq \|x-h\|$ alors on déduit que $d(x,H) = \|x-h_0\|$

D-Théorème de Carathéodory et compacité

12-

On pose : $S = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \text{ avec } p \geq 1,\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1 \text{ et } x_i \in H\right\}$ et montrons que $Conv(H) = S$

- Montrons que : $Conv(H) \subset S$

Soient $x, y \in S$ alors : $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i$ avec :$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1$ et $x_i \in H$ et $y_i \in H$

Donc il est évidente que : $\forall t \in [0,1], tx + (1-t)y \in S$ alors S est convexe contenant H

Et comme $Conv(H)$ est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant H alors on déduit que : $Conv(H) \subset S$

- Montrons que : $S \subset Conv(H)$

Soit C_i un convexe de E contenant H avec $i \in [\![1,r]\!]$ alors par définition : $Conv(H) = \bigcap_{i=1}^{r} C_i$

Puis comme H est dans chaque C_i alors C_i contient toute combinaison convexe d'élément de H ce qui implique que $\forall i \in [\![1,r]\!], S \subset C_i$ alors $S \subset \bigcap_{i=1}^{r} C_i = Conv(H)$

Finalement on montré que : $Conv(H) = S$

13-

Comme $card\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1\} = p - 1 \geq n + 1$ alors la famille$(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est liée ,ce qui implique l'existence des réelsnon tous nuls : $\mu_2, \mu_3, .., \mu_p$ tel que: $\sum_{i=2}^{p}\mu_i(x_i - x_1) = 0$

on pose : $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p}\mu_i$ alors dans ce cas $\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p}\mu_i = 0$

14-

On considère les ensembles suivants $I^+ = \{i \in [\![1,p]\!], u_i > 0\}$ et $I^- = \{i \in [\![1,p]\!], u_i \leq 0\}$ et on note que ces deux ensembles sont non vides car tous les u_i ne sont pas nuls et $\sum_{i=1}^{p}\mu_i = 0$

On pose : $\theta = min\left\{\frac{\lambda_i}{u_i}, i \in [\![1,p]\!] \text{ et } u_i > 0\right\} = \frac{\lambda_m}{u_m}$ et on note que dans ce cas $\theta \geq 0$

Donc : $\forall i \in I^+, \lambda_i - \theta\, u_i \geq 0$ et : $\forall i \in I^-, \lambda_i - \theta\, u_i \geq 0$ alors $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i - \theta\, u_i \geq 0$

Et comme : $\begin{cases} x = \sum_{i=1, i\neq m}^{p}\lambda_i x_i + \lambda_m x_m \\ x_m = -\frac{1}{u_m}\sum_{i=1, i\neq m}^{p} u_i x_i \end{cases}$ alors $x = \sum_{i=1, i\neq m}^{p}(\lambda_i - \theta\, u_i)x_i$ ce qui montre que x s'écrit comme une combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H

Si $x \in Conv(H)$ alors on vient de montrer que ce x s'écrit comme une combinaison convexe de la forme : $x = \sum_{i=1, i\neq m}^{p}(\lambda_i - \theta\, u_i)x_i$ d'au plus $p-1$ éléments de H et comme $\sum_{i=1, i\neq m}^{p}(\lambda_i - \theta\, u_i) = 1$ alors $Conv(H)$ est constitué des combinaisons convexe d'au plus $n+1$ éléments de H (car $p - 1 \geq n + 1$)

15-

On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \quad \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$$
$$\big(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_1, \dots, x_{n+1})\big) \to \Phi(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_j$$

- *Montrons que l'application Φ est continue :*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\big(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_i, \dots, x_{n+1})\big), \big(\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), y = (y_1, \dots, y_{n+1})\big) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ alors :

- $\Phi(\lambda + \beta, x) = \sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_i + \beta_i)x_i = \Phi(\lambda, x) + \Phi(\beta, x)$
- $\Phi(\lambda, x + y) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x_i + y_i) = \Phi(\lambda, x) + \Phi(\lambda, y)$
- $\Phi(\alpha\lambda, x) = \Phi(\lambda, \alpha x) = \alpha\Phi(\lambda, x)$

Alor l'application Φ bilinéaire, alors elle est continue (puisque on est en dimension finie)

- *Montrons que $\Phi(\Lambda \times H^{n+1}) = Conv(H)$:*

D'abord

$$\Phi(\Lambda \times H^{n+1}) = \left\{ y \in E \ \text{tel que} \ \exists\big(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), x = (x_i, \dots, x_{n+1})\big) \in \Lambda \times H^{n+1}, y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_j \right\}$$

Alors il est clair que par définition de Conv(H) : $\Phi(H \times \Lambda^{n+1}) \subset Conv(H)$

D'autre part $\Phi(\Lambda \times H^{n+1})$ est un convexe : en effet soient $\alpha \in [0,1]$ et $(x, y) \in \Phi(\Lambda \times H^{n+1})^2$

Puis : $(\alpha, 1 - \alpha, 0,0 \dots, 0) \in \Lambda$ et $(x, y, y, y, \dots, y) \in H^{n+1}$

alors $\Phi\Big(\big((\alpha, 1 - \alpha, 0,0 \dots, 0), (x, y, y, y, \dots, y)\big)\Big) = \alpha x + (1 - \alpha)y$ ce qui prouve $\Phi(\Lambda \times H^{n+1})$ est un convexe de E puis comme conv(H) est le plus petit convexe contenant H

alors on conclut que $\Phi(\Lambda \times H^{n+1}) = Conv(H)$

- *Montrons que Conv(H) est compact de E*

D'abord comme H est compact alors H^{n+1} est compact

Alors on déduit que $\Lambda \times H^{n+1}$ est un compact et puisque Φ est continue , donc on déduit que Conv(H) est compact de E

E-Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16-

Pour cette question il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact ,en effet :

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\|_1 = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{Tr(I_n)} = \sqrt{n}$ ce qui implique que $O_n(\mathbb{R})$ est bornée de $GL_n(\mathbb{R})$

Puis on considère une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A

D'abord soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $M_n(\mathbb{R})$, il est claire qui $M_p \to 0$ alors ${M_p}^\top \to 0$

Alors ce qui implique que $\left({A_p}^\top\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\top$

Donc : $A^\top A = \lim_{p\to+\infty} {A_p}^\top A_p = I_n$ ce qui veut dire que $A \in O_n(\mathbb{R})$

Alors on a montré que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$

On conclut alors $O_n(\mathbb{R})$ est un compact

Et utilisant la question 15 on déduit que $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ est compact

17-

D'abord $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = 1$ car $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| = \|X\|$

Puis soit $M \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$ alors il existe $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ de $O_n(\mathbb{R})$, et des réels $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_p$ positifs non tous nuls tel que : $M = \sum_{i=1}^p \lambda_i A_i$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$

Alors : $\|M\|_2 \le \sum_{i=1}^p \lambda_i \|A_i\|_2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$

Ce qui montre que $M \in \mathcal{B}$ et finalement on déduit que $Conv\big(O_n(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{B}$

18-

En utilisant la question 11 alors : $\langle M - N, V - N\rangle \le 0$

Donc : $\langle M - N, V - N\rangle \le 0 \Rightarrow tr(A(V - N)) \le 0$

$\qquad \Rightarrow tr(AV) \le tr(AV)$

Puis comme M n'appartient pas à $Conv\big(O_n(\mathbb{R})\big)$ alors : $\|M - N\|^2 > 0$ ce qui implique $tr(A(M - N)) > 0$, alors on conclut que $tr(AN) < tr(AM)$

Alors on a montré que : $\forall V \in Conv\big(O_n(\mathbb{R})\big), tr(AV) \le tr(AN) < tr(AM)$

Puis on prend : $V = {}^tU$ on déduit que $tr(S) < tr(USM)$

19 -

On considère la base $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ orthonormée constituée des vecteurs propres associés à chaque valeur propres λ_i de la matrice S (l'existence de cette base est assurée du fait que S est symétrique à valeurs réelles) et on note $Sp(S) = \{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ l'ensemble des valeurs propres de S , puis par définition : $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$

Puis en utilisant la question 1 : $tr(MUS) = \sum_{i=1}^{n} \langle MUSv_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MUv_i, v_i \rangle$

En utilisant le théorème de Cauchy-Schwartz et le fait que $M \in \mathcal{B}$ alors :

$\forall i \in [\![1,n]\!], \langle MUv_i, v_i \rangle \le \|MUv_i\| \|v_i\| \le \|Uv_i\| \|v_i\| \le 1$

Donc on déduit que : $tr(MUS) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(S)$

20-

De la question 18 et 19 on déduit une contradiction, alors $\forall M \in \mathcal{B}$, $M \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$, ce qui veut dire que : $\mathcal{B} \subset Conv(O_n(\mathbb{R}))$ et en utilisant la question 17 on conclut que :

$$Conv(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B}$$

F-Points extrémaux

21-

Comme : $\begin{cases} V \in \mathcal{B} \\ W \in \mathcal{B} \end{cases}$ alors $\forall X \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \|VX\| \le \|X\| \\ \|WX\| \le \|X\| \end{cases}$

D'autre par $U = \frac{1}{2}(U + W)$ implique que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|VX + WX\| = 2\|X\|$

Alors on conclut que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|VX\| = \|X\|$ et $\|WX\| = \|X\|$

En effet si il existe $Y \in \mathbb{R}^n, \|VY\| < \|Y\|$ et $\|WY\| \le \|Y\|$ alors $\|VY + WY\| \le \|VY\| + \|WY\| < 2\|Y\|$ est ceci est une contradiction)

Donc on a montré que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|VX + WX\| = \|VX\| + \|WX\|$ alors d'après le théorème de Minkowski : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\exists a_X \in IR^+, VX = a_X.WX$ ce qui conclut que les vecteurs VX et WX sont liés pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

Après :

$U = \frac{1}{2}(U + W) \Rightarrow \forall X \in IR^n \backslash \{0\},\ UX = \frac{1+a_X}{2} VX$ et $\|VX\| = \|X\|$

$\Rightarrow \forall X \in IR^n \backslash \{0\}$,, et $\|UX\| = \frac{1+a_X}{2} \|X\|$

$\Rightarrow \forall X \in IR^n \backslash \{0\},\ a_X = 1$ car $\|UX\| = \|X\|$

Alors : $\forall X \in IR^n \backslash \{0\},\ UX = VX = WX$ et ceci reste valable $X = 0$

Donc on conclut que : $U = V = W$ ce qui montre que U est extrémal dans $\mathcal{B}$

22-

D'après la question 9 : il existe une matrice U de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice S symétrique à valeurs réels positive tel que : $A = US$, puis comme S est diagonalisable avec $Sp(D) = \{d_i, i \in [\![1,n]\!]\} \subset \mathbb{R}^+$

Alors : $\exists H \in O_n(\mathbb{R}), S = HD\,{}^tH$ avec $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Puis en posant : $P = UH$ qui appartient bien au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et $Q = {}^tH$

On déduit que : $A = QDP$

23-

D'abord : $D = {}^tQA\,{}^tP$ Alors :$\|D\|_2 = \|{}^tQA\,{}^tP\|_2 \le \|{}^tQ\|_2 \|{}^tP\|_2 \|A\|_2 \le 1$

Et en utilisant la question 4 : $\|D\|_2 = max\ Sp(D) = \{d_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ ce qui conclut que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], d_i \le 1$$

Maintenant si $\forall i \in [\![1,n]\!], d_i = 1$ alors dans ce cas : $A = PQ \in O_n(\mathbb{R})$ et ceci est une contradiction, alors on conclut que : $\exists j \in [\![1,n]\!], d_j < 1$

24-

Comme $d_j < 1$ alors $\exists\, \alpha > 0$, $d_j + \alpha = 1$

Alors on considère les deux matrices suivantes :

$\begin{cases} A_\alpha = Pdiag(d_1, d_2, \dots, d_{j-1},\ d_j + \alpha, d_{j+1}, \dots, d_n)Q \\ A_{-\alpha} = Pdiag(d_1, d_2, \dots, d_{j-1},\ d_j - \alpha, d_{j+1}, \dots., d_n)Q \end{cases}$

Alors il est claire que :$A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$ par contre cette relation ne peut pas impliquer $A = A_\alpha = A_{-\alpha}$ car si non $A_\alpha = A_{-\alpha}$ entraine $d_j = 1 + \alpha$ et ceci une contradiction

Finalement on conclut que tout matrice n'appartenant pas $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas extrémal et que d'après la question 21 l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$ est $O_n(\mathbb{R})$