Problème : Résolution de l'équation : $A^2 + B^2 = I_2$ dans $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$

On considère $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ l'anneau des matrices réelles carrées dont la matrice unité est :
$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *, puis, si* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$,on note :* $\boldsymbol{T_A = a + d}$ *et*
$\boldsymbol{A^\top} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$

Partie I

I-1 : Montrer que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel

I-2 : On définit l'ensemble E_A par : $E_A = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \det(A - \lambda I_2) = 0\}$ *pour une matrice A de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$*

I-2-1 : Montrer que : $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ , det(\lambda A) = \lambda^2 det(A)$ *et*
$\forall A , B \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) : \det(AB) = \det(A)\det(B)$

I-2-2 : Montrer que si A est non inversible alors E_A est non vide

I-2-3 : Montrer que : $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ A^2 = T_A A - \det(A) I_2$

I-2-4: Montrer que pour tout $A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ \det(A - \lambda I_2) = 0 <=> \lambda^2 - T_A\lambda + \det(A) = 0$

I-2-5 : On considère : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *déterminer : E_A et E_B*

I-2-6 : Montrer que pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times), \lambda \in E_A$ *si-est-seulement-si il existe un vecteur* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *non nul solution du système d'équations* $\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ bx + dy = \lambda y \end{cases}$ *, et dans ce cas on dit que le vecteur X est associé à λ*

I-2-7 : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *déterminer le ou les vecteurs* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *associés à l'ensemble des éléments de E_A , puis vérifier que les vecteurs trouvés constituent une base pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,\times)$*

I-2-8 : Montrer que : $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ E_{AA^\top} \subset \mathbb{R}^+$

I-2-9 : Montrer que : $\forall A , B \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) : (A + B)^\top = A^T + B^T$ *et* $(AB)^\top = B^T A^\top$

I-2-7 : Montrer que $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ , \det(A) = \det(A^\top)$

Puis déduire que $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ , E_A = E_{A^\top}$

I-2-10 : Montrer que : $\forall A , B \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) : T_{A+B} = T_A + T_B$ *et*
$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) : T_{\lambda A} = \lambda T_A$

Partie II

On définit $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers

Soient A , B deux matrices de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ vérifiant la relation (R) suivante : $(\boldsymbol{R}) : \boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

II-1 : Montrer que : $T_A A + T_B B = (\det(A) + \det(B) + 1) I_2$ *(on peut utiliser la question I-2-2)*

II-2-1 : Montrer que A^T et B^T vérifient la relation (R)

II-2-2 : Montrer que ${T_A}^2 = {T_B}^2 = 1$

II-3-1 : On suppose que A et B ne sont pas inversibles, déterminer les deux matrices A et B

II-4 : On suppose que A est inversible et que B n'est pas inversible

II-4-1 : Montrer que $\det(A) = -2$

II-4-2 : Déduire que A et B ne peuvent pas vérifier la relation $(\boldsymbol{R})$

II-5 : On considère l'ensemble S tel que : $S = \{M \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) \text{ tel que} : MM^\top = I_2\}$ *et on suppose que A et B appartiennent à S*

II-5-1 : Montrer que $(S,\times)$ est un groupe

II-5-2 : Montrer que $\{-1,0,1\} \not\subset E_A \cup E_B$

II-5-3 : Montrer que : $A^\top = \frac{1}{det(A)}(A - T_A I_2)$ *et* $B^\top = \frac{1}{det(B)}(B - T_B I_2)$

II-5-4 : Déduire que : $\{-1,0,1,T_A,T_B\} \not\subset E_A \cup E_B$

II-5-5 : Montrer que $\det(A) \in \{-1,1\}$ *et* $\det(B) \in \{-1,1\}$

II-5-6 : En utilisant les questions (II-2-2 ,II-5-3) montrer que : $\det(A) = \det(B) = -1$

II-5-7 : Conclure

II-6 : On suppose maintenant que A et B sont inversibles

II-6-1 : Montrer que : $AB + BA = 0$ (on peut utiliser les question II-1 et II-2-2)

II-6-2 : En utilisant la question I-2-1 conclure

II-7 : Déterminer tous les couples (A,B) de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$ vérifiant : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$