Problème : Résolution de l'équation : $A^2+B^2=I_2$ dans $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$

On considère $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ l'anneau des matrices réelles carrées dont la matrice unité est : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *, puis, si* $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ *une matrice de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$, on note :* $\boldsymbol{T_A=a+d}$ *et* $\boldsymbol{A^{\top}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}&\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$

Partie I

I-1- Montrer que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel

I-2- On définit l'ensemble E_A par : $E_A=\{\lambda\in\mathbb{R}\ tel\,que\ \det(A-\lambda I_2)=0\}$ *pour une matrice A de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$*

I-2-1- Montrer que :

$\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\ \forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\,,det(\lambda A)=\lambda^2det(A)$ *et* $\forall A\,,B\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times):\det(AB)=\det(A)\det(B)$

I-2-2-Montrer que si A est non inversible alors E_A est non vide

I-2-3-Montrer que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ A^2=T_AA-\det(A)I_2$

I-2-4-Montrer que pour tout $A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\quad \det(A-\lambda I_2)=0 <=> \lambda^2-T_A\lambda+\det(A)=0$

I-2-5-On considère : $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$ *déterminer E_A et E_B*

I-2-6-Montrer que pour tout $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\lambda\in E_A$ *si-est-seulement-si il existe un vecteur* $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *non nul solution du système d'équations* $\begin{cases}ax+by=\lambda x\\bx+dy=\lambda y\end{cases}$ *, et dans ce cas on dit que le vecteur X est associé à λ*

I-2-7- On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ *déterminer le ou les vecteurs* $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *associés à l'ensemble des éléments de E_A , puis vérifier que les vecteurs trouvés constituent une base pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,\times)$*

I-2-8-Montrer que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\quad E_{AA^{\top}}\subset\mathbb{R}^+$

I-2-9-Montrer que : $\forall A\,,B\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$: $(A+B)^{\top}=A^T+B^T$ *et* $(AB)^{\top}=B^TA^{\top}$

I-2-7- Montrer que $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\,,\ \det(A)=\det(A^{\top}$*, et déduire que* $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\,,E_A=E_{A^{\top}}$

I-2-10 : Montrer que :

$\forall A\,,B\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$: $\begin{cases}T_{A+B}=T_A+T_B\\T_{AB}=T_{BA}\end{cases}$ *et* $\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\ \forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times):\ T_{\lambda A}=\lambda T_A$

Partie II

On définit $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers

Soient $A\,,B$ deux matrices de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ vérifiant la relation (R) suivante : $(\boldsymbol{R}):\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$

II-1-Montrer que : $T_AA+T_BB=(\det(A)+\det(B)+1)I_2$ *(on peut utiliser la question I-2-2)*

II-2-On suppose que A et B ***ne sont pas inversibles***

II-2-1- Montrer que ${T_A}^2={T_B}^2=1$

II-2-2-Montrer que $\frac{1}{T_A}\in E_B$ *, puis que* $T_AT_B=1$

II-2-3- Déduire que $T_A=T_B=1$ ou $T_A=T_B=-1$

II-2-3-1 Montrer que si $T_A=T_B=1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante : $A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$*

II-2-3-1 Déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

II-2-3-2 Montrer que si $T_A=T_B=-1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante : $A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&-1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}-1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$*

II-2-3-3 Déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

II-3-On suppose que A ***est inversible*** *et B* ***n'est pas inversible***

II-3-1- Montrer que $1+\det(A)\in E_{T_AA}$

II-3-2- Déduire que ${T_A}^2=\ (1+\det(A))^2$ *puis montrer que* $\begin{cases}T_{B^2}={T_B}^2=(\det(A))^2-1\\T_{A^2}=(\det(A))^2+1\end{cases}$

II-3-3- Déduire que $\det(A)\in\{-1,1\}$

II-3-3-1 Cas $\det(A)=1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_B=0$ et $T_A=\pm2$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$

II-3-3-2 Cas $\det(A)=-1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_A=T_B=0$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases}A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$

II-3-3-1-3 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante : $A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}b_1&b_3\\b_2&-b_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\,,b_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$ et* $\begin{cases}a_1^2+a_2a_3=1\\b_1^2=b_2b_3\end{cases}$

II-3-3-1-4 Conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$ *et donner un exemple des ces matrices*