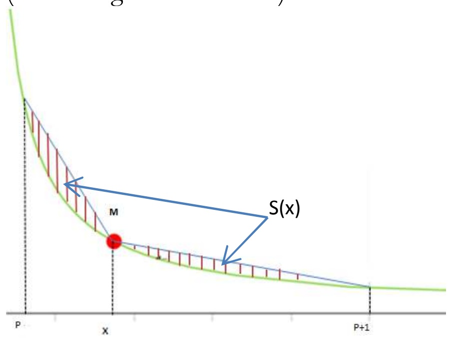
Exercice 1

On considère dans le repère orthonormé la courbe (C) de la fonction $t \to \frac{1}{t}$, puis on considère une portion (T) de la courbe (C) sur un intervalle $[p, p+1]$ avec p est un réel stricte positif.

On considère un point M sur la portion (T) dont l'abscisse x appartenant à l'intervalle $[p, p+1]$ (Voir la figure ci-dessous) :



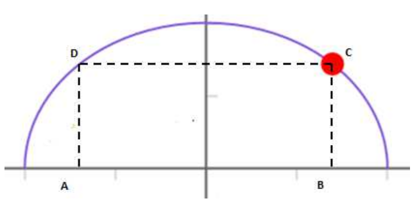
1- Montrer que la surface hachurée $S(x)$ est donnée par la formule suivante :

$$S(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2p(p+1)}x - \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$$

2- Déterminer alors la positon de M sur la portion (T) afin que la surface hachurée soit minimale et calculer cette surface dans le cas $p = 1$

On considère dans le plan un demi-cercle du rayon 1, puis on considère un rectangle ABCD comme ce que montre la figure ci-dessous.

Soit x l'abscisse du point B et $\Delta(x)$ la surface du rectangle ABCD



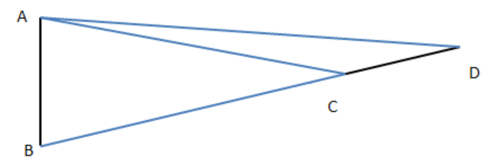
3- Montrer que : $\Delta(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

4- Déterminer la position du point B afin que la surface du rectangle ABCD soit maximale et calculer cette surface

Exercice 2

On considère la figure ci-dessous tel que :

- $AB = CD = a$
- $\widehat{ABC} = 80^\circ$
- $\widehat{CDA} = 20^\circ$
- $\widehat{ACB} = \beta$



Le but de cet exercice est de calculer par différentes manières la valeur β

On pose $\varepsilon_1 = \frac{\sin(20^\circ)}{\sin(80^\circ)}$ et $\varepsilon_2 = \sin(20^\circ)$ et $x = \sin(\beta)$

Première Méthode :

1- Montrer que $\frac{\sin(\beta)}{\sin(80^\circ)} = \frac{a}{AC}$ et $\frac{\sin(20^\circ)}{\sin(80^\circ)} = \frac{a}{AD}$

2- Montrer que : $2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{\varepsilon_2{}^2}{x^2} + \varepsilon_1{}^2 = 1$

3- On admet que : $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx 0{,}35$ et on pose $y = x^2$

Montrer alors que : $((1-\varepsilon_1{}^2)^2 + 4\varepsilon_1{}^4)y^2 - 2(\varepsilon_1{}^4 + \varepsilon_1{}^2)y + \varepsilon_1{}^4 = 0$

Puis déduire que : $0{,}83\, y^2 - 0{,}275y + 0{,}015 = 0$

4- Conclure que : $\widehat{ACB} = \beta \approx 30^\circ$

Deuxième Méthode :

1- Montrer que $\frac{\sin(\beta - 20^\circ)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(20^\circ)}{\sin(80^\circ)} = \varepsilon_1$

2- En utilisant la relation $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$, montrer que :

$\sin(\beta) = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\sqrt{1-\varepsilon_2{}^2}-\varepsilon_1\right)^2+\varepsilon_2{}^2}} \approx 0{,}5$ puis déduire que $\widehat{ACB} = \beta \approx 30^\circ$