

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

٢٠١٦ | ٢٠١٥ | ٢٠١٤ | ٢٠١٣ | ٢٠١٢ | ٢٠١١ | ٢٠١٠ | ٢٠٠٩ | ٢٠٠٨ | ٢٠٠٧ | ٢٠٠٦ | ٢٠٠٥ | ٢٠٠٤ | ٢٠٠٣ | ٢٠٠٢ | ٢٠٠١ | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٩ | ٢٠٠٨ | ٢٠٠٧ | ٢٠٠٦ | ٢٠٠٥ | ٢٠٠٤ | ٢٠٠٣ | ٢٠٠٢ | ٢٠٠١ | ٢٠٠٠

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهنيالمركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

المادة	الشعبية أو المسار	الرياضيات	مدة الإجاز	
		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9
				4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(\times, +, \mathbb{C})$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ جسم تبادلي.

$E = \{M(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ و $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نضع: $(M_3(\mathbb{R}), +)$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(+)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2) : M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ ونعتبر التطبيق: φ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E , حيث الزوج (x, y) من \mathbb{R}^2

أ) بين أن φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو 0.25

ب) استنتج أن (E, \times) زمرة تبادلية وأن عناصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(\times, +)$ جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أ) أحسب $A \times M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

ب) استنتاج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $(171 = 3 \times 57) \quad a^{171} \equiv -b^{171} \quad [173]$ (لاحظ أن: $a^{171} \equiv -b^{171} \pmod{173}$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a+b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a 0.25

أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $a^{172} \equiv b^{172} \quad [173]$ 0.5

ب) بين أن: $a^{171}(a+b) \equiv 0 \quad [173]$ 0.5

ج) استنتاج أن 173 يقسم $a+b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية:

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حل للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث

1- تحقق أن: $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$ 0.25

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E) . 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعمد و منظم و موجه (O, \bar{u}, \bar{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى وغير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقتها z يحقق العلاقة:

$$z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

1- أ) بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$ 0.5

ب) استنتج أن النقطة M تتنمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $z_2 = \bar{z}_1$ فإن M تتنمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مرکزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $[0, \pi]$

أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

ب) استنتاج أن النقطة M تتنمي إلى واسط القطعة $[M_1 M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $[0, \pi]$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حللا المعادلة:

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$$

أ) بدون حساب z_1 و z_2 تتحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ 0.5

ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ 0.5

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي

$e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$ حيث: θ محصور بين 0 و x 0.5

2- استنتاج أن:

(أ) $(\forall x > 0) ; 1 - x < e^{-x}$ 0.25

(ب) $(\forall x > 0) ; x + 1 < e^x$ 0.25

(ج) $(\forall x > 0) ; 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty)$ بما يلي: $f(0) = 1$ و إذا كان $x > 0$

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

ولتكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعدد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن: $(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$ (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-أ) من الجزء الأول 0.25

ب) استنتج أن: $(\forall x \geq 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ 0.5

3- أ) تحقق أن: $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$ 0.5

ب) استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها. 0.75

4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتغال على المجال $[0, +\infty]$ وأن $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ 0.75

ب) استنتاج أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0, +\infty]$. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ب) من الجزء الأول) 0.5

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$ 0.5

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتاج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ج) من الجزء الأول) 0.5

3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ 0.5

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I = [0, +\infty]$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتغال على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I . 0.5

ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I 0.25

2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير وذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ 0.5

3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده. 0.25

ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F . 0.5

انتهى