

التمرين الأول : (4.5 نقط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$ لكل n من \mathbb{N}

1. احسب u_1 و u_2 **0.5**

2. بين بالترجع أن لكل n من \mathbb{N} : $u_n < \frac{5}{3}$ **0.5**

3. أ. بين أن لكل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right)$ **0.5**

ب. استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية وأنها متقاربة. **0.75**

4. نضع $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ لكل n من \mathbb{N}

أ. احسب v_0 **0.25**

ب. بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ **0.5**

4. ج. احسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$ لكل n من \mathbb{N} **1**

4. د. احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ **0.5**

التمرين الثاني : (4.5 نقط) (تقدم جميع نتائج هذا التمرين على شكل كسر)

يحتوي كيس على سبع كرات غير قابلة للتمييز باللمس، كرتان لونهما أبيض وثلاث كرات لونها أحمر وكرتان لونهما أخضر. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

1. نعتبر الحدثين التاليين:

A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "

B : " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة حمراء "

1. أ. بين أن احتمال الحدث A هو $p(A) = \frac{5}{21}$ **1**

ب. احسب احتمال الحدث B **1**

ج. بين أن $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$ **1**

د. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك. **0.5**

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ. امل الجدول جانبه بعد نقله على ورقة تحريرك مغطا جوابك. **0.75**

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$			

ب. احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X **0.25**

التمرين الثالث : (11 نقطة)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ **0.5**

ب. احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ **0.5**

2.1. تحقق أن لكل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$ 0.5

2.2. أعط إشارة $g'(x)$ على $]0; +\infty[$ 0.5

2.3. احسب $g(1)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ 0.75

2.4. استنتج من جدول تغيرات g أن $g(x) \leq 0$ على $]0; 1[$ وأن $g(x) \geq 0$ على $]1; +\infty[$ 1

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$ وليكن (C)

تمثيلها المبياني في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1.1. بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ثم أعط تاويلا هندسيا للنتيجة. 1

1.2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تاويلا هندسيا للنتيجة. 1.75

2.1. بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$ 1

2.2. احسب $f(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f 1

3. نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = -\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \ln x$

بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ 1

4. في الشكل أسفله (C) هو التمثيل المبياني للدالة f و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$

احسب مساحة الجزء المخدش . 1.5

