Problème : Résolution de l'équation : $A^2+B^2=I_2$ dans $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$

On considère $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ l'anneau des matrices réelles carrées dont la matrice unité est : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *, puis, si* $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ *une matrice de* $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ *, on note :* $\boldsymbol{T_A=a+d}$ *et* $A^{\top}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}&\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$

Pour la simplication , on notera parfois $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ *par* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

Partie I

I-1- Montrer que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un espace vectoriel*

I-2- On définit l'ensemble E_A par : $E_A=\{\lambda\in\mathbb{R}\ tel\,que\ \det(A-\lambda I_2)=0\}$ *pour une matrice A de* $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

I-2-1- Montrer que :

$\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\ \forall A\in M_2(\mathbb{R})\,,det(\lambda A)=\lambda^2det(A)$ *et* $\forall A\,,B\ \in M_2(\mathbb{R}):\det(AB)=\det(BA)=\det(A)\det(B)$

I-2-2-Montrer que si A est non inversible alors E_A est non vide

I-2-3-Montrer que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ A^2=T_AA-\det(A)I_2$

I-2-4-Montrer que pour tout $A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$, $\det(A-\lambda I_2)=0 <=> \lambda^2-T_A\lambda+\det(A)=0$

I-2-5-On considère : $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$ *déterminer E_A et E_B*

I-2-6-Montrer que pour tout $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\lambda\in E_A$ *si-est-seulement-si il existe un vecteur* $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *non nul solution du système d'équations* $\begin{cases}ax+by=\lambda x\\bx+dy=\lambda y\end{cases}$ *, et dans ce cas on dit que le vecteur X est associé à λ*

I-2-7- On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ *déterminer le ou les vecteurs* $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *associés à l'ensemble des éléments de E_A , puis vérifier que les vecteurs trouvés constituent une base pour l'espace vectoriel* $(\mathbb{R}^2,+,\times)$

I-2-8-Montrer que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ \ E_{AA^{\top}}\subset\mathbb{R}^+$

I-2-9-Montrer que : $\forall A\,,B\ \in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$: $(A+B)^{\top}=A^T+B^T$ *et* $(AB)^{\top}=B^TA^{\top}$

I-2-7- Montrer que $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$, $\det(A)=\det(A^{\top})$*,et déduire que* $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\,,E_A=E_{A^{\top}}$

I-2-10 : Montrer que :

$\forall A\,,B\ \in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$: $\begin{cases}T_{A+B}=T_A+T_B\\T_{AB}=T_{BA}\end{cases}$ *et* $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times):\ T_{\lambda A}=\lambda T_A$

Partie II

On définit $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *l'ensemble des matrices à coefficients entiers*

Soient A,B deux matrices de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *vérifiant la relation (R) suivante :* $(\boldsymbol{R}):\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$

II-1-Montrer que : $T_AA+T_BB=(\det(A)+\det(B)+1)I_2$ *(on peut utiliser la question I-2-2)* *puis que* ${T_A}^2+{T_B}^2=2(det(A)+det(B)+1)$

II-2-On suppose que A et B ***ne sont pas inversibles***

II-2-1- Montrer que ${T_A}^2={T_B}^2=1$

II-2-2-Montrer que si $T_A=1$ et $T_B=-1$, alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}a_1-1&a_3\\a_2&-a_1\end{pmatrix}$ *avec* $a_i\in\mathbb{Z}$ *pour tous* $i\in\{1,2,3\}$ *et* $a_2a_3=a_1(1-a_1)$

Puis conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *verifiant la relation :* $\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$ *et donner un exemple des ces matrices*

II-2-3- Montrer que si $T_A=T_B=1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec* $a_i\in\mathbb{Z}$ *pour tous* $i\in\{1,2,3\}$

Et déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

II-2-4- Montrer que si $T_A=T_B=-1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&-1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}-1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec* $a_i\in\mathbb{Z}$ *pour tous* $i\in\{1,2,3\}$

Et Déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

II-3-On suppose que A ***est inversible*** *et B* ***n'est pas inversible***

II-3-1- Montrer que $1+\det(\mathrm{A})\in\mathrm{E}_{\mathrm{T_AA}}$

II-3-2- Déduire que ${T_A}^2=(1+\det(A))^2$ *puis montrer que* $\begin{cases}T_{B^2}={T_B}^2=(\det(A))^2-1\\T_{A^2}=(\det(A))^2+1\end{cases}$

II-3-3- Déduire que $\det(A)\in\{-1,1\}$

II-3-3-1 Cas $\det(A)=1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_B=0$ et $T_A=\pm2$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$

II-3-3-2 Cas $\det(A)=-1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_A=T_B=0$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

II-3-3-1-3 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i , b_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = 1 \\ b_1^2 = -b_2 b_3 \end{cases}$

II-3-3-1-4 Conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$ et donner un exemple des ces matrices

Partie III

III-1-On considère l'ensemble S tel que $S = \{M \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times) \text{ tel que} : MM^\top = I_2\}$ et on suppose que A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ appartiennent à S et verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

III-1-1- Montrer que $(S,\times)$ est un groupe

III-1-2-Montrer que : $A^\top = \frac{1}{det(A)}(T_A I_2 - A)$ et $B^\top = \frac{1}{det(B)}(T_B I_2 - B)$ (on peut utiliser I-2-3)

III-1-3-Montrer que $\det(A) \in \{-1,1\}$ et $\det(B) \in \{-1,1\}$

III-1-4-On suppose que $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$ montrer alors que ${T_A}^2 = {T_B}^2 = 1$ puis en utilisant la question III-1-2 trouver une contradiction

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = 1$ montrer alors ${T_A}^2 + {T_B}^2 = 6$ puis conclure

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = -1$ montrer alors ${T_A}^2 + {T_B}^2 = -2$ puis conclure

III-1-6-Conclure

Partie IV

Dans cette on considère deux matrices **inversibles** A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-1- Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que : $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

IV-2-Soit M une matrice inversible de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que : $T_{M^{-1}} = \frac{T_M}{\det(M)}$ (on peut utiliser la question I-2-3)

IV-3- Déduire que $\det(A)\, T_{A^{-1}B} = \det(B) T_{B^{-1}A}$

IV-4 Montrer que $\begin{cases} T_B \det(A)\, T_{A^{-1}B} = (1 + \det(B) + \det(A))(1 + \det(\mathrm{B}) - \det(\mathrm{A}))T_A \\ T_A \det(B)\, T_{B^{-1}A} = (1 + \det(B) + \det(A))(1 + \det(\mathrm{A}) - \det(\mathrm{B}))T_B \end{cases}$ (on peut utiliser la question II-1)

IV-5- Montrer $A^{-1}B + B^{-1}A = A^{-1}B^{-1}$ puis déduire que $T_{AB} = (\det(A) + \det(B)) \det(A)\, T_{A^{-1}B}$

IV-6- Déduire que $\begin{cases} {T_A}^2 = (1 + \det(A))^2 - (\det(B))^2 \\ {T_B}^2 = (1 + \det(B))^2 - (\det(A))^2 \end{cases}$

IV-7- On suppose que $T_A = T_B = 0$ montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + a_2 a_3 + b_2 b_3 = -1 \\ a_1^2 + a_2 a_3 \neq 0 \\ b_1^2 + b_2 b_3 \neq 0 \end{cases}$

Puis si on considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ détéreminer une matrice B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-8- Pour la suite du problème $T_A \neq 0$

IV-8-1 On suppose que $T_B = 0$

IV-8-1-1 Montrer que $1 + \det(B) - \det(A) = 0$ puis que $T_A \mathrm{A} = 2\det(\mathrm{A})\, \mathrm{I}$

IV-8-1-2 Déduire que $A = aI_2$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et que B est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $a_1^2 + b_1^2 + b_2 b_3 = 1$

Puis si on considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ détéreminer une matrice B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-8-2 On suppose que $T_B \neq 0$

IV-8-2-1 En utilisant la question IV-6 montrer que $\frac{{T_A}^2 - {T_B}^2}{{T_A}^2 + {T_B}^2} = (\det(A) - \det(B))$

IV-8-2-2 Montrer que $\frac{{T_A}^2 - {T_B}^2}{{T_A}^2 + {T_B}^2} \in [-1,1]$ puis déduire que $\det(A) = \det(B)$ (on peut utiliser ici la question IV-4) , puis montrer que ${T_A}^2 = {T_B}^2 = 1 + 2\det(A)$

IV-8-2-3 On suppose que $T_A = T_B$,

IV-8-2-3-1 montrer que ${T_A}^2 (A + B)^2 = (1 + 2\det(A))^2 I_2$ puis déduire que $AB + BA = 2\det(A)\, I_2$

IV-8-2-3-2 En utilisant la question IV-5 montrer que $\det(A)\, T_{A^{-1}B} = 1$

IV-8-2-3-3 En utilisant la question IV-4 montrer que $\det(A) = 0$ puis conclure

IV-8-2-4 On suppose que $T_A = -T_B$

IV-8-2-4-1 montrer que ${T_A}^2 (A - B)^2 = (1 + 2\det(A))^2 I_2$ puis déduire que $AB - BA = 2\det(A)\, I_2$

IV-8-2-4-2 déduire que $\det(A) = 0$ puis conclure

IV-8-2-5 Conclure

Partie V

V-1 D'après ce qui précede faire une synthèse de l'ensemble des solutions de l'équation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$ dans $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$

V-2 (Question bonus) Soient A , B , C des matrices de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ tel que : $\boldsymbol{A^3 + B^3 = C^3}$ montrer que les trois matrices ne peuvent pas être toutes **non inversibles** (on peut utiliser le grand théorème de Fermat : $\forall n \geq 3$, il n'existe pas des entiers relatifs a , b , c verifiant : $a^n + b^n = c^n$