

Problème : Résolution de l'équation : $A^2 + B^2 = I_2$ dans $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)^2$

On considère $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ l'anneau des matrices réelles carrées dont la matrice unité est :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$, on note : $T_A = a + d$ et

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Partie I

I-1- Montrer que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un espace vectoriel

I-2- On définit l'ensemble E_A par : $E_A = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \det(A - \lambda I_2) = 0\}$ pour une matrice A de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

I-2-1- Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), \det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) \text{ et } \forall A, B \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times) : \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

I-2-2- Montrer que si A est non inversible alors E_A est non vide

I-2-3- Montrer que : $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), A^2 = T_A A - \det(A) I_2$

I-2-4- Montrer que pour tout $A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - T_A \lambda + \det(A) = 0$

I-2-5- On considère : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ déterminer E_A et E_B

I-2-6- Montrer que pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), \lambda \in E_A$ si-est-seulement-si il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul solution du système d'équations $\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ bx + dy = \lambda y \end{cases}$, et dans ce cas on dit que le vecteur X est associé à λ

I-2-7- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ déterminer le ou les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à l'ensemble des éléments de E_A , puis vérifier que les vecteurs trouvés constituent une base pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \times)$

I-2-8- Montrer que : $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), E_{AA^T} \subset \mathbb{R}^+$

I-2-9- Montrer que : $\forall A, B \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times) : (A + B)^T = A^T + B^T$ et $(AB)^T = B^T A^T$

I-2-7- Montrer que $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), \det(A) = \det(A^T)$, et déduire que $\forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times), E_A = E_{A^T}$

I-2-10 : Montrer que :

$$\forall A, B \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times) : \begin{cases} T_{A+B} = T_A + T_B \\ T_{AB} = T_{BA} \end{cases} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall A \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times) : T_{\lambda A} = \lambda T_A$$

Partie II

On définit $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers

Soient A, B deux matrices de $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ vérifiant la relation (R) suivante : (R) : $A^2 + B^2 = I_2$

II-1- Montrer que : $T_A A + T_B B = (\det(A) + \det(B) + 1) I_2$ (on peut utiliser la question I-2-2)

puis que $T_A^2 + T_B^2 = 2(\det(A) + \det(B) + 1)$

II-2- On suppose que A et B **ne sont pas inversibles**

II-2-1- Montrer que $T_A^2 = T_B^2 = 1$

II-2-2- Montrer que si $T_A = 1$ et $T_B = -1$, alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & 1 - a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_i \in \mathbb{Z} \text{ pour tous } i \in \{1, 2, 3\} \text{ et } a_2 a_3 = a_1(1 - a_1)$$

Puis conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ vérifiant la relation : $A^2 + B^2 = I_2$ et donner un exemple des ces matrices

II-2-3- Montrer que si $T_A = T_B = 1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & 1 - a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 - a_1 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_i \in \mathbb{Z} \text{ pour tous } i \in \{1, 2, 3\}$$

Et déduire que dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

II-2-4- Montrer que si $T_A = T_B = -1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -1 - a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 - a_1 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_i \in \mathbb{Z} \text{ pour tous } i \in \{1, 2, 3\}$$

Et Déduire que dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

II-3- On suppose que A **est inversible** et B **n'est pas inversible**

II-3-1- Montrer que $1 + \det(A) \in E_{T_A A}$

II-3-2- Déduire que $T_A^2 = (1 + \det(A))^2$ puis montrer que $\begin{cases} T_{B^2} = T_B^2 = (\det(A))^2 - 1 \\ T_{A^2} = (\det(A))^2 + 1 \end{cases}$

II-3-3- Déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$

II-3-3-1 Cas $\det(A) = 1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_B = 0$ et $T_A = \pm 2$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

II-3-3-2 Cas $\det(A) = -1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_A = T_B = 0$

II-3-3-1-2 Dédurre que
$$\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

II-3-3-1-3 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_i, b_i \in \mathbb{Z} \text{ pour tous } i \in \{1,2,3\} \text{ et } \begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = 1 \\ b_1^2 = b_2 b_3 \end{cases}$$

II-3-3-1-4 Conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ vérifiant la relation : $A^2 + B^2 = I_2$ et donner un exemple des ces matrices

Partie III

III-1-On considère l'ensemble S tel que $S = \{M \in (M_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ tel que } : MM^T = I_2\}$ et on suppose que A et B appartiennent à S

III-1-1- Montrer que (S, \times) est un groupe

III-1-2-Montrer que : $A^T = \frac{1}{\det(A)}(T_A I_2 - A)$ et $B^T = \frac{1}{\det(B)}(T_B I_2 - B)$ (on peut utiliser I-2-3)

III-1-3-Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$ et $\det(B) \in \{-1, 1\}$

III-1-4-On suppose que $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$ montrer alors que $T_A^2 = T_B^2 = 1$ puis en utilisant la question III-1-2 trouver une contradiction

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = 1$ montrer alors $T_A^2 + T_B^2 = 6$ puis conclure

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = -1$ montrer alors $T_A^2 + T_B^2 = -2$ puis conclure

III-1-6-Conclure