Problème : Résolution de l'équation : $A^2+B^2=I_2$ dans $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)^2$

On considère $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ l'anneau des matrices réelles carrées dont la matrice unité est : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *, puis, si* $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ *une matrice de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$, on note :* $\boldsymbol{T_A=a+d}$ *et* $\boldsymbol{A^\top=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}$

Pour la simplication , on notera parfois $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ par $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

Partie I

I-1- Montrer que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel

I-2- On définit l'ensemble E_A par : $E_A=\{\lambda\in\mathbb{R}\ tel\,que\ \det(A-\lambda I_2)=0\}$ *pour une matrice A de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$*

I-2-1- Montrer que : $\begin{cases}\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall\mathrm{A}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\ ,\det(\lambda\mathrm{A})=\lambda^2\det(\mathrm{A})\\ \forall\mathrm{A}\,,\mathrm{B}\ \in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}):\det(\mathrm{AB})=\det(\mathrm{BA})=\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})\\ \forall\mathrm{A}\in(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)\ ,\ \det(\mathrm{A})=\det(\mathrm{A}^\top)\end{cases}$

I-2-2-Montrer que si A est non inversible alors E_A est non vide

I-2-3-Montrer que : $\forall A\,,B\ \in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ :\ (A+B)^\top=A^T+B^T$ *et* $(AB)^\top=B^TA^\top$

I-2-4-Montrer que $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ ,E_A=E_{A^\top}$

I-2-5-Montrer que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ A^2=T_AA-\det(A)I_2$

I-2-6-Montrer que pour tout $A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\quad\det(A-\lambda I_2)=0 <=> \lambda^2-T_A\lambda+\det(A)=0$

I-2-7-On considère : $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$ *déterminer E_A et E_B*

I-2-8- Soit $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ *une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$*

I-2-8-1 Montrer que $\lambda\in E_{AA^\top} <=> \lambda^2-\ (a^2+b^2+c^2+d^2)\lambda+(ad-bc)^2=0$

I-2-8-2 Montrer que $\sqrt{[(a-d)^2+(b+c)^2][(a+d)^2+(b-c)^2]}\le 2|ad|+2|bc|$

(indication : $\forall\,x,y\ \in\mathbb{R}^+\ ,\sqrt{xy}\ \le\frac{|x-y|}{2}$*)*

I-2-8-3 Déduire que : $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times),\ \ E_{AA^\top}\subset\mathbb{R}^+$ *et déduire que pour tout $\lambda>0$ et pour toute matrice A de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ la matrice $AA^\top+\lambda I_2$ est inversible*

I-2-9-Montrer que :

$\forall A\,,B\ \in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ :\ \begin{cases}T_{A+B}=T_A+T_B\\T_{AB}=T_{BA}\end{cases}$ *et* $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times):\ T_{\lambda A}=\lambda T_A$

I-2-10- Déduire que $\forall A\in(M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ ,\ T_{A^2}={T_A}^2-2\det(A)$

Partie II

On définit $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers

Soient $A\,,B$ deux matrices de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ vérifiant la relation (R) suivante : $(\boldsymbol{R}):\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$

II-1-Montrer que : $T_AA+T_BB=(\det(A)+\det(B)+1)I_2$ *(on peut utiliser la question I-2-4)*

puis que ${T_A}^2+{T_B}^2=2(det(A)+det(B)+1)$

*II-2-On suppose que A et B **<u>ne sont pas inversibles</u>***

II-2-1- Montrer que ${T_A}^2={T_B}^2=1$

II-2-2-Montrer que si $T_A=1$ et $T_B=-1$, alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}a_1-1&a_3\\a_2&-a_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$ et $a_2a_3=a_1(1-a_1)$*

Puis conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ vérifiant la relation : $\boldsymbol{A^2+B^2=I_2}$ *et donner un exemple de ces matrices*

II-2-3- Montrer que si $T_A=T_B=1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$*

Et déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ *ou* $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

II-2-4- Montrer que si $T_A=T_B=-1$ alors les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&-1-a_1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}-1-a_1&-a_3\\-a_2&a_1\end{pmatrix}$ *avec $a_i\in\mathbb{Z}$ pour tous $i\in\{1,2,3\}$*

Et Déduire que dans ca cas : $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ *ou* $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$

*II-3-On suppose que A **<u>est inversible</u>** et B **<u>n'est pas inversible</u>***

II-3-1- Montrer que $1+\det(\mathrm{A})\in\mathrm{E}_{\mathrm{T_AA}}$

II-3-2- Déduire que ${T_A}^2=\ (1+\det(A))^2$ *puis montrer que* ${T_B}^2=1-(\det(A))^2$

II-3-3- Déduire que $\det(A)\in\{-1,1\}$

II-3-3-1 Cas $\det(A)=1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_B=0$ et $T_A=\pm 2$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$

II-3-3-2 Cas $\det(A)=-1$

II-3-3-1-1 Montrer que $T_A=T_B=0$

II-3-3-1-2 Déduire que $\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

II-3-3-1-3 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = 1 \\ b_1^2 = -b_2 b_3 \end{cases}$

II-3-3-1-4 Conclure que dans ce cas qu'il y a une infinité de matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$ et donner un exemple de ces matrices

Partie III

III-1-On considère l'ensemble S tel que $S = \{M \in (M_2(\mathbb{R}),+,\times)\ tel\ que : MM^\top = I_2\}$, on suppose que A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ appartiennent à S et verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

III-1-1- Montrer que $(S,\times)$ est un groupe

III-1-2-Montrer que : $A^\top = \frac{1}{det(A)}(T_A I_2 - A)$ et $B^\top = \frac{1}{det(B)}(T_B I_2 - B)$ (on peut utiliser I-2-4)

III-1-3-Montrer que $\det(A) \in \{-1,1\}$ et $\det(B) \in \{-1,1\}$

III-1-4-On suppose que $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$ montrer alors que ${T_A}^2 = {T_B}^2 = 1$ puis en utilisant la question III-1-2 trouver une contradiction

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = 1$ montrer alors ${T_A}^2 + {T_B}^2 = 6$ puis conclure

III-1-5- On suppose que $\det(A) = \det(B) = -1$ montrer alors ${T_A}^2 + {T_B}^2 = -2$ puis conclure

III-1-6-Conclure

Partie IV

Dans cette partie on considère deux matrices A et B de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ **inversibles** verifiant la relation : $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-1- Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que : $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

IV-2-Soit M une matrice inversible de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que : $T_{M^{-1}} = \frac{T_M}{\det(M)}$ (on peut utiliser la question I-2-4)

IV-3- Déduire que $\det(A)\, T_{A^{-1}B} = \det(B) T_{B^{-1}A}$

IV-4 Montrer que $\begin{cases} T_B \det(A)\, T_{A^{-1}B} = (1 + \det(\mathrm{B}) - \det(\mathrm{A}))T_A \\ T_A \det(B)\, T_{B^{-1}A} = (1 + \det(\mathrm{A}) - \det(\mathrm{B}))T_B \end{cases}$ (on peut utiliser la question II-1)

IV-5- Montrer $A^{-1}B + AB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ puis déduire que $T_{AB} = (\det(A) + \det(B))\det(A)\, T_{A^{-1}B}$

IV-6- Montrer que $\begin{cases} {T_A}^2 = (1 + \det(A))^2 - (\det(B))^2 \\ {T_B}^2 = (1 + \det(B))^2 - (\det(A))^2 \end{cases}$ (On peut utiliser IV-4 et II-1)

IV-7- On suppose que $T_A = T_B = 0$ montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + a_2 a_3 + b_2 b_3 = 1 \\ a_1^2 + a_2 a_3 \neq 0 \\ b_1^2 + b_2 b_3 \neq 0 \end{cases}$

Puis si on considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ détéreminer une matrice B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-8- Pour la suite du problème $T_A \neq 0$

IV-8-1 On suppose que $T_B = 0$

IV-8-1-1 Montrer que $1 + \det(B) - \det(A) = 0$ puis que $T_A \mathrm{A} = 2\det(\mathrm{A})\, \mathrm{I}_2$

IV-8-1-2 Déduire que $A = aI_2$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et que B est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ avec $b_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $a^2 + b_1^2 + b_2 b_3 = 1$

Puis si on considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ détéreminer une matrice B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-8-2 On suppose que $T_B \neq 0$

IV-8-2-1 En utilisant la question IV-6 montrer que $\frac{{T_A}^2 - {T_B}^2}{{T_A}^2 + {T_B}^2} = (\det(A) - \det(B))$

IV-8-2-2 Montrer que $\frac{{T_A}^2 - {T_B}^2}{{T_A}^2 + {T_B}^2} \in [-1,1]$ puis déduire que $\det(A) = \det(B)$ (on peut utiliser ici la question IV-4) , puis montrer que ${\mathrm{T_A}}^2 = {\mathrm{T_B}}^2 = 1 + 2\det(\mathrm{A})$ et $T_{A^2} = T_{B^2} = 1$

IV-8-2-3 On suppose que $T_A = T_B$

IV-8-2-3-1 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_4 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3,4\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + a_4^2 + 2a_2 a_3 = 1 \\ a_1 a_4 \neq a_2 a_3 \end{cases}$

IV-8-2-3-2 Détéreminer dans ce cas deux matrices A, B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

IV-8-2-4 On suppose que $T_A = -T_B$

IV-8-2-4-1 Montrer alors que les deux matrices A et B sont de la forme suivante :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -a_4 & a_3 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tous $i \in \{1,2,3,4\}$ et $\begin{cases} a_1^2 + a_4^2 + 2a_2 a_3 = 1 \\ a_1 a_4 \neq a_2 a_3 \end{cases}$

IV-8-2-4-2 Détéreminer dans ce cas deux matrices A, B verifiant la relation $\boldsymbol{A^2 + B^2 = I_2}$

Partie V

V-1 Déterminer l'ensemble Δ *des matrices* ***non inversibles*** *de* $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *vérifiant l'équation* $\boldsymbol{A^4+B^4=I_2}$

V-2

Soit n un entier naturel , montrer que l'ensemble des matrices non inversibles de $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *vérifiant l'équation* $\boldsymbol{A^{2^n}+B^{2^n}=I_2}$ *avec* $n\geq 2$ *est* Δ

V-2 (Question bonus) Soient A *,* B *,* C *des matrices de* $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ *non nulles tel que :*

$\boldsymbol{A^3+B^3=C^3}$ ***et*** $\boldsymbol{A^3}$ *,* $\boldsymbol{B^3}$ *,* $\boldsymbol{C^3}$ ***sont non nulles ,*** *montrer que les trois matrices ne peuvent pas être toutes* ***non inversibles*** *(on peut utiliser le grand théorème de Fermat :* $\forall n\geq 3$ *, il n'existe pas des entiers naturels non nuls* a *,* b*,* c *verifiant :* $a^n+b^n=c^n$ *)*