On considère le système d'équations suivant :

$$(S):\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2+z^2=13 \\ xy+yz=8 \end{cases} \text{ tel que } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

On note $M_2(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des matrices réelles carrées, c'est à dire l'espace vectoriel des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* a , b , c *et* d *sont des réels.*

1- Soit M *une matrice de* $M_2(\mathbb{R})$ *montrer que* $det\,(M^2)=\left(det(M)\right)^2$

2- Soient x , y , z *des solutions du système* (S) *et on considère la matrice* A *de* $M_2(\mathbb{R})$ *tel que :* $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

2-1 Montrer que : $A^2=\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy+yz \\ xy+yz & y^2+z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

2-2 Montrer que : $y^2\left(18+2(xz-y^2)\right)=64$

2-3 Montrer que : $det(A)\in\{-1,1\}$ *et déduire que* $xz-y^2=1$ *ou* $xz-y^2=-1$

2-4 Déduire finalement que l'ensemble des solutions du système (S) *est :* $\left\{(1,2,3);\ (-1,-2,-3);\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{7}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)\right\}$